Numeričko integriranje i Rombergov algoritam

Vidas, Nadia

Sveučilište u Rijeci, Fakultet informatike i digitalnih tehnologija

Sveučilišni prijediplomski studij Informatika

Nadia Vidas

Numeričko integriranje i Rombergov algoritam

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Sanda Bujačić Babić

Rijeka, srpanj 2023.

SAŽETAK

Rombergov algoritam metoda je numeričke integracije koja koristi principe udvostručavanja segmenata produljene trapezne formule i eliminaciju člana greške dviju susjednih produljenih formula. Ponovljena procedura Rombergovog algoritma naziva se Richardsonova ekstrapolacija. Rombergov algoritam je metoda numeričke integracije specifična i po tome što se izvode omjeri grešaka i eksponenti omjera u Rombergovoj tablici, a cilj je izračun aproksimativne vrijednosti integrala s najvećim stupnjem točnosti, odnosno najmanjom greškom. Brzina i točnost izračuna Rombergovog algoritma razlikuje se ovisno o karakteristikama podintegralnih funkcija, a korektivnim mehanizmima dolazi se do najbolje aproksimativne vrijednosti integrala.

KLJUČNE RIJEČI

Rombergov algoritam, greške, numerička integracija, trapezna formula, Richardsonova ekstrapolacija, Rombergova tablica

SADRŽAJ

1. UVOD 1

2. O GREŠKAMA ZAOKRUŽIVANJA 2

2.1. GREŠKE 2

2.1.1. APSOLUTNA GREŠKA APROKSIMACIJE 3

2.1.2. RELATIVNA GREŠKA APROKSIMACIJE 3

3. NUMERIČKA INTEGRACIJA 4

3.1. TRAPEZNA FORMULA 5

3.2. PRODULJENA TRAPEZNA FORMULA 7

3.3. SIMPSONOVA FORMULA 8

4. ROMBERGOV ALGORITAM 9

4.1. PRIKAZ ROMBERGOVOG ALGORITMA 12

4.2. PRIMJENA ROMBERGOVOG ALGORITMA 16

5. ZAKLJUČAK 20

POPIS SLIKA I TABLICA 21

POPIS LITERATURE 22

1. UVOD

Rješavanje složenih matematičkih zadataka znanstvenicima je oduvijek predstavljalo izazov. Iako često postoji mišljenje da se svaki matematički zadatak može riješiti egzaktno, to u velikom broju slučajeva ipak nije tako. Naime, mnogobrojnim problemima u matematici i znanosti općenito pristupamo na aproksimativni način, odnosno određujući približne vrijednosti jer egzaktno rješenje nismo u mogućnosti odrediti. Ovakvim pristupom i teorijom aproksimacije bavi se numerička matematika. Numerička matematika uključuje numeričku analizu koja se bavi određivanjem i unaprjeđivanjem algoritama za numeričko izračunavanje vrijednosti, a među ostalim, uključuje i metode numeričke integracije. U ovom će radu biti obrađena jedna od metoda numeričke integracije, Rombergov algoritam.

Rad se sastoji od četiri osnovna poglavlja. Prvo poglavlje *O greškama zaokruživanja* navodi osnovne klase grešaka i obrađene su apsolutna i relativna greška. U drugom poglavlju *Numerička integracija* navedene su neke od metoda numeričke integracije te su prikazane trapezna, produljena trapezna i Simpsonova formula kao uvod u treće i glavno poglavlje ovoga rada: *Rombergov algoritam.* U njemu je teorijski i s općim formulama prikazan Rombergov algoritam, nakon čega je isto oprimjereno zadatkom.

Cilj je rada prikazati Rombergov algoritam, metodu numeričke integracije, na primjeru funkcije povoljnih svojstava i odrediti brzinu izračunavanja aproksimativne vrijednosti integrala s najmanjom pogreškom, odnosno najvećom točnošću. Navedeno je uzeto kao primjer kako bi se što zornije mogli prikazati principi Rombergovog algoritma sa svim pripadajućim formulama i izračunatim aproksimativnim vrijednostima integrala. Osim toga, cilj je i prikazati praktičnu primjenu Rombergovog algoritma na konkretnom primjeru.

2. O GREŠKAMA ZAOKRUŽIVANJA

Grana numeričke matematike koja se bavi određivanjem i unaprjeđivanjem algoritama za numeričko, odnosno približno izračunavanje vrijednosti koncepata karakterističnih za matematičku analizu naziva se numerička analiza. Navedeno se odnosi na razvoj i primjenu numeričkih metoda za rješavanje problema matematičke analize [1]. Matematički problemi koji se često rješavaju numerički su interpolacija funkcija, određivanje korijena nelinearnih jednadžbi, numeričko deriviranje, numeričko integriranje, rješavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, i drugi [1].

Osim razvojem i unaprjeđivanjem metoda za rješavanje istaknutih matematičkih problema, numerička analiza bavi se određivanjem grešaka numeričkih metoda, ocjenjivanjem grešaka metoda i grešaka prouzrokovanih arhitekturom računala [1]. Jedan je od ciljeva numeričke analize pronaći metodu za rješavanje problema te određivanje točnosti izračuna uz ocjenu greške [2].

Moguće je, dakle, zaključiti da područje numeričke analize obuhvaća razne matematičke aspekte, a u svrhu ovoga rada pozornost će biti usmjerena na aproksimaciju integrala jednom od vrlo poznatih i izrazito često korištenih metoda, Rombergovim algoritmom.

2.1. GREŠKE

Gotovo sve što računamo radimo uz pomoć računala koje, koliko god napredno bilo, ima ograničene arhitekturalne resurse i konačnu memoriju. Upravo zato računala za prikazivanje brojeva i računanje koriste jedan diskretan, čak štoviše, konačan, podskup skupa racionalnih brojeva Q. Dodatno, osnovni matematički zakoni asocijativnosti, komutativnosti i distributivnosti ne vrijede [4]. U praktičnom računanju postoje dvije osnovne vrste grešaka: greške zbog polaznih aproksimacija i greške zaokruživanja. Greške zbog polaznih aproksimacija uključuju: greške modela, greške metode i greške u polaznim podacima. Greške modela najčešće nastaju raznim pojednostavljivanjima složenih sustava, odnosno, zamjenom složenih sustava jednostavnijima koje možemo opisati matematičkim zapisom. Greške metode pojavljuju se kada se beskonačni procesi zamjenjuju konačnima. Obično ih dijelimo u dvije kategorije: greške diskretizacije i greške odbacivanja. Greške diskretizacije nastaju zamjenom kontinuuma konačnim diskretnim skupom točaka ili zamjenom „beskonačno" male veličine nekim konkretnim malim brojem. Greške odbacivanja proizlaze iz zamjene beskonačnog niza, reda ili produkta konačnim nizom, sumom ili produktom, odnosno odbacivanjem ostatka niza, reda ili produkta. Greške u polaznim podacima nastaju korištenjem nepreciznih podataka koji imaju greške zbog, primjerice, prethodnih računanja, zaokruživanja podataka ili krivog mjerenja [1,4].

2.1.1. APSOLUTNA GREŠKA APROKSIMACIJE

Apsolutna greška aproksimacije označava udaljenost između egzaktne vrijednosti a i njezine aproksimativne vrijednosti a^*. Označavamo je s Δa^* te vrijedi:

$$\Delta a^* = |a - a^*| .$$

Kod izračuna greške koristimo apsolutnu vrijednost jer je najčešće svejedno radi li se o greški s lijeve ili desne strane vrijednosti a. Ipak, ako je potrebno, moguće je odrediti i prikazati s koje je strane [4].

2.1.2. RELATIVNA GREŠKA APROKSIMACIJE

Relativna greška je omjer između apsolutne greške Δa^* i apsolutne vrijednosti $|a|$. Označavamo je s δa^* i vrijedi:

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a|} , \qquad a \neq 0 .$$

Često se koristi i aproksimacija relativne greške:

$$\delta a^* \approx \frac{\Delta a^*}{|a^*|} , \qquad a^* \neq 0 .$$

Relativna greška korisna je kod određivanja reda greške u određenom kontekstu [4].

Ako je vrijednost a poznata, apsolutna greška je dobra mjera za udaljenost aproksimacije od točne vrijednosti, no relativna greška je često primjerenija [1]. Primjerice, pri izračunu mjere nekog građevinskog objekta, pogreška u izračunu u iznosu od jednog centimetra ne čini preveliku štetu. Međutim, ta ista greška, nastala pri izračunu u nekom laboratoriju u okviru kojeg se provode mjerenja u nanometrima, golema je. Nadalje, odstupanje od čak jednog metra pri mjerenju svemirskih tijela može se potpuno zanemariti. Relativna greška opisuje upravo te značajke pogrešaka: daje informaciju o tome kolika je „šteta“ učinjena greškom mjerenja u svakoj od situacija.

Primjer: Zadane su vrijednosti: x = 1000 $\pm$ 0.05 cm te y = 1 $\pm$ 0.05 cm.

U oba slučaja su vrijednosti apsolutnih grešaka jednake.

$$\Delta x = |1000 - 1000.05| = 0.05\,, \qquad \Delta y = |1 - 1.05| = 0.05\,.$$

Relativna greška nudi informaciju o omjeru aproksimacije i egzaktne vrijednosti, što daje iznimno važan kontekst prilikom računanja.

$$\delta x^* = \frac{|1000-1000.05|}{1000} = 0.00005\,, \qquad \delta y^* = \frac{|1-1.05|}{1} = 0.05\,.$$

Dakle, za razliku od apsolutne greške, relativna greška daje potpuniju informaciju o točnosti izmjerenih veličina u usporedbi s informacijom koju imamo iz apsolutne greške.

3. NUMERIČKA INTEGRACIJA

Praktična uporaba matematičkih operacija u velikom broju slučajeva nameće potrebu korištenja približnih umjesto stvarnih veličina te je umjesto stvarnog rezultata zadovoljavajuća njegova aproksimacija [3]. Matematička metoda koja se koristi za aproksimaciju vrijednosti složenih integrala s ciljem dobivanja aproksimativnog rješenja vrijednosti integrala naziva se numerička integracija. Zahtijeva se da je podintegralna funkcija glatka ili barem po dijelovima glatka funkcija, a onda se ona promatra na podsegmentima inicijalnog segmenta integracije i evaluira se vrijednost integrala na njima [1]. Osnovna je ideja metoda numeričke integracije izračunavanje vrijednosti integrala funkcije korištenjem vrijednosti funkcije na nekom konačnom skupu točaka [1, 3].

Metode numeričke integracije omogućuju dobivanje približnih, aproksimativnih vrijednosti za vrijednosti integrala složenih funkcija koji se ne mogu integrirati analitički. S obzirom na mrežu podsegmenata koja se određuje prilikom numeričke integracije, razlikujemo dva osnovna pristupa: mrežu ekvidistantnih i mrežu neekvidistantnih čvorova. Mreža ekvidistantnih čvorova (susjedne točke jednako su udaljene jedna od druge) koristi se kod Newton Cotesovih formula, od kojih su neke trapezna i Simpsonova formula i njihove produljene varijante te Rombergov algoritam, dok se mreža neekvidistantnih čvorova koristi kod Gauss Legendreovih formula i drugih. U numeričkoj integraciji koristimo aproksimativnu vrijednost tako da moramo biti svjesni s kojom greškom radimo i unaprijed znati kakve će posljedice greška imati na konačni rezultat [3].

3.1. TRAPEZNA FORMULA

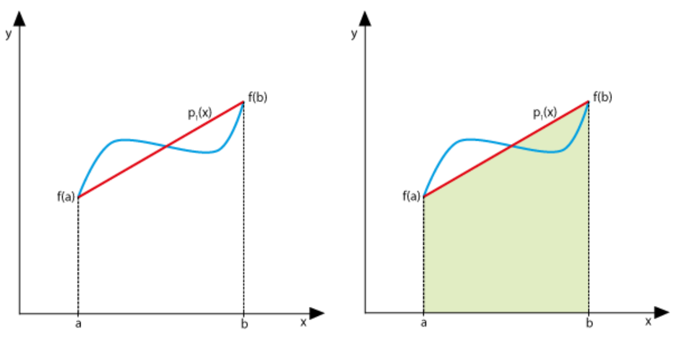
Interpolaciju funkcije *f(x)* možemo odraditi na više načina, ali konačne integracijske formule imaju oblik

$$I^* = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)\,,$$

gdje je n unaprijed zadan, x_i su čvorovi integracije (interpolacije), a w_i su težine. Ako su čvorovi fiksirani i ekvidistantni, onda takve formule nazivamo Newton Cotesove formule. U praksi se koriste dva tipa Newton Cotesovih forumula: zatvorene formule (rubovi segmenata a, b su ujedno i čvorovi) i otvorene formule (rubovi segmenata a, b nisu čvorovi) [5].

Trapezna formula je vrsta zatvorenih Newton Cotesovih formula kojom podintegralnu funkciju u čvorovima interpolacije interpoliramo linearnom funkcijom, odnosno polinomom stupnja 1 [5].

Trapeznom formulom na segmentu $[a,b]$ formira se površina ispod pravca na segmentu $[a,b]$, gdje su a i b početna i krajnja točka segmenta na koji primjenjujemo trapeznu formulu. Naziv formule dolazi iz geometrijske interpretacije: aproksimiramo površinu ispod krivulje funkcije površinom trapeza omeđenog funkcijom $p_1(x)$, x osi te vertikalnim pravcima $x=a$ i $x=b$ [5]. (*Slika 1.*)

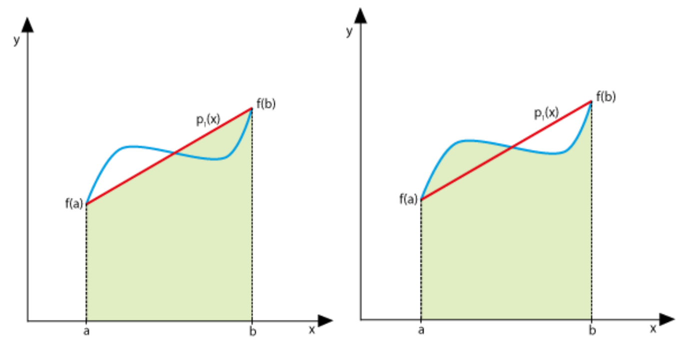


Slika 1. Trapezna formula [5]

Trapezna formula je oblika:

$$I^* = \int_a^b p_1(x)\,dx = (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.$$

Apsolutna greška ΔI^* predstavlja razliku vrijednosti površina ispod grafa funkcije *f(x)* i one ispod pravca $p_1(x)$.



Slika 2. Usporedba vrijednosti površina ispod pravca $p_1(x)$ i grafa funkcije *f(x)* [5]

Jedna od zadaća numeričke matematike jest procijeniti aproksimaciju, odnosno dati ocjenu greške aproksimativnih vrijednosti. S tim ciljem se često zahtijevaju neka povoljna svojstva promatranih funkcija. Jedno takvo svojstvo funkcije je glatkoća.

Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija. Kažemo da je f klase C^0 ako je f neprekidna. Funkcija f je klase C^k ako je $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ neprekidna funkcija. Ako je $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ neprekidna za svaki $k \in \mathbb{N}$, onda je funkcija f klase C^∞. Kažemo da je funkcija glatka ako je ona klase C^1, odnosno, funkcija je glatka ako je ona neprekidna i ako joj je neprekidna prva derivacija.

Teorem o ocjeni greške trapezne formule daje ocjenu greške za podintegralnu funkciju *f(x)* koja je klase C^2 na segmentu $[a,b]$, a integrirana je pomoću trapezne formule na istom segmentu [5]:

Teorem 1. Neka je $f \in C^2\,[a,b]$. Tada postoji $\xi \in [a,b]$ tako da vrijedi:

$$I - I^* = \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} = -(b-a)^3\,\frac{f'''(\xi)}{12}\,.$$

Ako označimo maksimum apsolutne vrijednosti druge derivacije funkcije f na zadanom segmentu $[a,b]$ s $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, onda je apsolutna greška

$$\Delta I^* = |I - I^*| \le \frac{(b-a)^3}{12} M_2\,.$$

3.2. PRODULJENA TRAPEZNA FORMULA

Ako je segment integracije $[a,b]$ relativno velik, odnosno, ako na segmentu integracije graf funkcije koju integriramo ne prati graf linearne funkcije (što je najčešće i slučaj), i greška numeričkog integriranja bit će velika. S ciljem postizanja bolje aproksimacije I^* vrijednosti integrala I, segment $[a,b]$ podijelit ćemo na više podsegmenata i onda na svakom od njih primijeniti trapeznu formulu. Takvu formulu nazivamo produljena trapezna formula [1]. Dakle, s ciljem postizanja veće preciznosti, umjesto trapezne formule gotovo uvijek koristimo produljenu trapeznu formulu. Ova metoda bazira se na dijeljenju inicijalnog segmenta integracije $[a,b]$ na n dijelova te primjenjivanju trapezne formule na svakom od tih podsegmenata. Broj podsegmenata n biramo prema točnosti koju želimo zadovoljiti. Budući da su trapezna i produljena trapezna formula Newton Cotesove formule, čvorovi su ekvidistantni, odnosno za mrežu n ekvidistantnih čvorova na segmentu $[a,b]$ vrijedi:

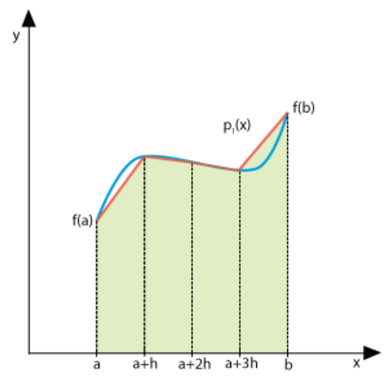
$$x_k = a + kh, \quad k = 0,1,\ldots,n,$$

gdje je $h = \frac{b-a}{n}$ što nazivamo korakom.

Produljena trapezna formula je oblika:

$$I^* = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n=1} f(x_i) + f(b)\right],$$

gdje je $f(x_i) = y_i$, i = 0, 1, …, n [5]. (*Slika 3.*)



Slika 3. Produljena trapezna formula [5]

Vidljiva je veća preciznost nego u slučaju kad imamo samo jedan segment $[a,b]$, no svejedno postoji određeno odstupanje od prave vrijednosti [4]. Ukupna greška produljene trapezne formule je:

$$I - I^* = -h^3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_i)}{12},$$

gdje su $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.

Ocjenu greške u ovom slučaju zapisujemo u obliku:

$$I - I^* = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi).$$

Želimo li a priori zadovoljiti određenu, unaprijed zadanu točnost aproksimacije ε, možemo prije numeričke integracije odrediti n, odnosno broj potrebnih podsegmenata koji će osigurati da aproksimativna vrijednost integrala bude u traženoj točnosti. Vrijedi ocjena [4]:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}, \; M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

3.3. SIMPSONOVA FORMULA

Simpsonova formula je još jedna vrsta zatvorenih Newton Cotesovih formula kojom podintegralnu funkciju interpoliramo kvadratnom funkcijom, odnosno interpolacijskim polinomom stupnja 2 u čvorovima interpolacije [5]

$$x_0 = a, \qquad x_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad x_2 = b.$$

Ovom metodom formira se površina ispod novonastale kvadratne funkcije, a čiji je grafički prikaz parabola $p_2(x)$ na zadanom segmentu. Simpsonova formula glasi

$$I^* = \int_a^b p_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Obratimo li pozornost na to da Simpsonova formula koristi tri točke na zadanom segmentu, za razliku od trapezne formule koja koristi samo početnu i krajnju točku, odnosno koristi „jednu informaciju više“, zaključujemo da će i greška vrijednosti aproksimacije biti manja [5].

Teorem o ocjeni greške Simpsonove formule daje ocjenu greške za podintegralnu funkciju *f(x)* koja je klase C^4 na segmentu $[a,b]$, a integrirana je pomoću Simpsonove formule na istom segmentu [5].

Teorem 2. Neka je $f \in C^4[a,b]$. Tada postoji $\xi \in \langle a,b \rangle$ tako da vrijedi

$$I - I^* = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = -(b-a)^5 \frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}.$$

Ako označimo maksimum apsolutne vrijednosti četvrte derivacije funkcije f na zadanom segmentu $[a,b]$ s $M_4 = \max\limits_{x \in [a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$, onda je apsolutna greška

$$\Delta I^* = |I - I^*| \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \cdot \frac{M_4}{90}.$$

Postoji i produljena varijanta Simpsonove formule koju koristimo kada želimo veću točnost aproksimacije. S obzirom da ova metoda koristi dva podsegmenta u jednoj iteraciji, važno je napomenuti da je broj podsegmenata u produljenoj Simpsonovoj formuli uvijek paran [5].

4. ROMBERGOV ALGORITAM

Rombergov algoritam je metoda numeričke integracije koja koristi produljenu trapeznu formulu za poboljšanje procjene vrijednosti integrala. Takva se poboljšana procjena dobiva usporedbom procjena različitog broja manjih podsegmenata, odnosno iterativnim udvostručavanjem broja segmenata. Računanjem aproksimacije višeg reda točnosti smanjuje se greška aproksimacije. Richardsonova ekstrapolacija koja se temelji na ponavljanju primjene eliminacije vodećeg člana u asimptotskom razvoju greške iz dvije susjedne produljene formule daje aproksimaciju višeg reda. Određivanjem greške dobivene se vrijednosti unose u Rombergovu tablicu te se iz ocjene grešaka izvode omjeri grešaka članova u stupcu, koji bi se uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije, trebali ponašati prema modelu koji će biti prikazan u nastavku. Proučavanjem ponašanja omjera pogrešaka i eksponenata omjera pogrešaka u stupcu moguće je provjeriti ispravnost postupka i točnost izračuna [6].

Pri izvodu Rombergovog algoritma koristimo se sljedećim principima:

a) udvostručavanjem broja podsegmenata u produljenoj trapeznoj metodi,
b) eliminacijom člana greške iz dvije susjedne produljene formule. Primjena ovog principa naziva se Richardsonova ekstrapolacija [1].

Neka su $f(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ i $g(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dvije funkcije. Tada pišemo $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ ako postoji konstanta $c > 0$ i $x_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|f(x)| \leq cg(x)$, za svaki $x \geq x_0$.

Teorem 3. [1] Neka je $m \geq 0, n \geq 1, m, n$ prirodni brojevi.

Pretpostavimo da je $f \in C^{(2m+2)}[a,b]$. Za pogrešku produljene trapezne formule vrijedi

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx - I_n^T(f) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d_{2i}}{n^{2i}} + F_{n,m}\,,$$

gdje su koeficijenti

$$d_{2i} = -\frac{B_{2i}}{(2i)!}(b-a)^{2i}\left(f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)\right),$$

a ostatak je

$$F_{n,m} = \frac{(b-a)^{2m+2}}{(2m+2)!\,n^{2m+2}} \cdot \int_a^b \bar{B}_{2m+2}\left(\frac{b-a}{h}\right) f^{(2m+2)}(x)\,dx\,.$$

Ovdje su B_{2i} Bernoullijevi brojevi,

$$B_i = -\int_0^1 B_i(x)\,dx, \quad i \geq 1\,,$$

a $\bar{B}_i$ je periodičko proširenje običnih Bernoullijevih polinoma tako da vrijedi

$$\bar{B}_i(x) = \begin{cases} B_i(x), & \text{za } 0 \leq x \leq 1\,, \\ \bar{B}_i(x-1), & \text{za } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Bernoullijeve brojeve možemo definirati funkcijom izvodnicom za $|t| < 2\pi$ i $n \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\,.$$

Prvih nekoliko vrijednosti Bernoullijevih brojeva nalaze se u tablici 1. [7]:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$-\frac{5}{66}$

Tablica 1. Vrijednosti Bernoullijevih brojeva za $n = 0, 1, 2, ..., 10$

Bernoullijevi brojevi višeg reda osiguravaju veću točnost integracije [1].

Rombergov algoritam dobivamo tako da eliminiramo član po član iz reda za ocjenu greške na osnovu vrijednosti integrala s duljinom koraka *h* i *h/2*. Za podintegralne funkcije koje nisu dovoljno glatke, također se može (uz neke dodatne pretpostavke) asimptotski dobiti razvoj greške što posebno vrijedi za funkcije s algebarskim i/ili logaritamskim singularitetima [1].

Iz Euler-MacLaurinove formule, ako je *n* paran, za asimptotski razvoj greške dobivamo:

$$I - I_n^{(0)} = \frac{d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{n,m} \ ,$$

$$I - I_{n/2}^{(0)} = \frac{4d_2^{(0)}}{n^2} + \frac{16d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots + \frac{2^{2m}d_{2m}^{(0)}}{n^{2m}} + F_{\frac{n}{2},m} \ .$$

Pomnožimo li prvi razvoj s 4, eliminirat ćemo prvi član greške s n^{-2} te oduzmemo li joj drugi razvoj, dobit ćemo [1]:

$$4(I - I_n^{(0)}) - \left(I - I_{n/2}^{(0)}\right) = \frac{-12d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{60d_4^{(0)}}{n^4} + \cdots$$

Sređivanjem ovog izraza vrijednost *I* postaje

$$I = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3} - \frac{4d_4^{(0)}}{n^4} - \frac{20d_6^{(0)}}{n^6} + \cdots$$

Iz prethodnog izraza uzimamo prvi član s desne strane jednakosti kao precizniju aproksimaciju traženog integrala te ju označavamo s $I_n^{(1)}$:

$$I_n^{(1)} = \frac{4I_n^{(0)} - I_{n/2}^{(0)}}{3}, \ n \text{ paran}, \ n \geq 2 \, .$$

Dobivena formula označava aproksimacije četvrtog reda točnosti, odnosno vrijedi *O(h⁴)*.

Želimo li povećati red točnosti, ponavljamo postupak s asimptotskim razvojima grešaka aproksimacija iz drugog stupca:

$$I - I_n^{(1)} = \frac{d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots$$

$$I - I_{n/2}^{(1)} = \frac{16d_4^{(1)}}{n^4} + \frac{64d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots$$

Na isti način kao i ranije, prvi razvoj množimo s 4 i oduzimamo mu drugi razvoj:

$$16(I - I_n^{(1)}) - \left(I - I_{n/2}^{(1)}\right) = \frac{-48d_6^{(1)}}{n^6} + \cdots$$

Sređivanjem izraza dobit ćemo:

$$I = \frac{16I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15} - \frac{-48d_6^{(1)}}{15n^6} + \cdots$$

Kao i ranije, uzimamo prvi član s desne strane jednakosti i proglašavamo ga novom aproksimacijom vrijednosti integrala:

$$I_n^{(2)} = \frac{16 I_n^{(1)} - I_{n/2}^{(1)}}{15}, \; n \text{ višekratnik broja } 4, n \geq 4.$$

Ponavljanjem ovog postupka dobivamo Richardsonovu ekstrapolaciju te zapisujemo opću formulu:

$$I_n^{(k)} = \frac{4^k I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1} \; .$$

Greška je jednaka:

$$E_n^{(k)} = I - I_n^{(k)} = \frac{d_{2k+2}^{(k)}}{n^{2k+2}} + \cdots$$

4.1. PRIKAZ ROMBERGOVOG ALGORITMA

Neka je zadan integral $\int_a^b f(x)\, dx$ čiju vrijednost želimo aproksimirati Rombergovim algoritmom. Trapeznom formulom (označimo ju s I_1^0) $I_1^0 = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$ dobivamo aproksimativnu vrijednost zadanog integrala s najmanjom razinom točnosti.

Postupak dalje nastavljamo podjelom zadanog segmenta na dva manja podsegmenta jednake duljine, što znači da je broj segmenata *n=2*, a korak $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2}$. Radi se o prvoj produljenoj trapeznoj formuli koju označavamo s I_2^o, a aproksimaciju računamo:

$$I_2^o = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + f(b)\right].$$

Dobivena aproksimativna vrijednost integrala produljenom trapeznom formulom I_2^o ima manju grešku u odnosu na pravu vrijednost integrala od aproksimacije dobivene trapeznom formulom I_1^0. Dalje produljenom trapeznom formulom računamo aproksimativne vrijednosti integrala podjelom segmenta na sve veći broj podsegmenata iz čega slijedi da je za računanje I_4^0 broj segmenata *n=4*, a za I_8^0 *n=8*, itd. ovisno o željenom stupnju točnosti. Dobivene vrijednosti I_1^0, I_2^o, I_4^0i I_8^0 aproksimativne su vrijednosti zadanog integrala. Upravo je udvostručavanje broja podsegmenata u produljenoj trapeznoj formuli prvi princip na kojemu se temelji Rombergov algoritam. Za aproksimativne vrijednosti dobivene u ovom stupcu vrijedi da su drugog reda točnosti *O(h²)*.

Kako bismo se još više približili vrijednosti integrala, što je i cilj ove metode numeričke integracije, potrebno je iz dvije susjedne aproksimativne vrijednosti produljenih trapeznih formula izračunati aproksimativnu vrijednost višeg stupnja točnosti prema ranije zapisanoj općoj formuli:

$$I_n^k = \frac{4I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1} .$$

Uvrstimo li opće oznake ranije dobivenih vrijednosti, slijedi izračun prve iteracije:

$$I_2^1 = \frac{4I_2^0 - I_1^0}{3} ,$$

što odgovara Simpsonovoj formuli. Dobivena vrijednost I_2^1 aproksimativna je vrijednost četvrtog reda točnosti *O(h⁴)*. Postupak ponavljamo sa sljedećim dvjema aproksimativnim vrijednostima dobivenima produljenim trapeznim formulama, odnosno u ranije navedenu formulu unosimo opće oznake za sljedeće vrijednosti aproksimacija I_2^o i I_4^0 te I_4^0 i I_8^0, iz čega slijedi:

$$I_4^1 = \frac{4I_4^0 - I_2^0}{3} , \qquad I_8^1 = \frac{4I_8^0 - I_4^0}{3} .$$

Pomoću dobivenih vrijednosti četvrtog reda točnosti moguće je dalje ponavljanjem postupka, odnosno Richardsonovom ekstrapolacijom, izračunati aproksimativne vrijednosti još višeg reda točnosti. Uzmemo li vrijednosti I_2^1, I_4^1 i I_8^1 kao polazne vrijednosti, daljnjim računanjem možemo dobiti nove aproksimacije šestog reda točnosti $O(h^6)$. Iz navedenog slijedi:

$$I_4^2 = \frac{16I_4^1 - I_2^1}{15} , \qquad I_8^2 = \frac{16I_8^1 - I_4^1}{15} .$$

Aproksimacije dobivene ovim izračunom (I_4^2 i I_8^2) po istom principu koristimo dalje kako bismo dobili novu aproksimaciju višeg reda točnosti $O(h^8)$, I_8^3 , koju računamo također općom formulom, iz čega slijedi:

$$I_8^3 = \frac{64I_8^2 - I_4^2}{63} .$$

Ova bi vrijednost trebala biti do sada najbliža vrijednosti zadanog integrala.

Sada možemo formirati Rombergovu tablicu:

O(h²)	*O(h⁴)*	*O(h⁶)*	*O(h⁸)*	
I_1^0				
I_2^0	I_2^1			
I_4^0	I_4^1	I_4^2		
I_8^0	I_8^1	I_8^2	I_8^3	…
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Navedeni postupak dolaska do aproksimacije najbliže vrijednosti integrala ili aproksimacije do zadanog reda točnosti prikazan u općem primjeru korištenjem općih formula u praksi se računa sljedećim redoslijedom:

O(h²)	*O(h⁴)*	*O(h⁶)*	*O(h⁸)*	
1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	…

Izračun započnemo s jednim segmentom (*n=1*) kad primjenom trapezne formule dobijemo vrijednost I_1^0. Zatim povećavamo broj segmenata (*n=2*) i izračunavamo vrijednost I_2^0. Potom se iz dvije dobivene vrijednosti (I_1^0 i I_2^0) Simpsonovom formulom izračunava I_2^1. Sada provjeravamo, ako je zadano, je li dobivena aproksimacija zadovoljila zadani uvjet točnosti. Ako nije, dodatnim udvostručavanjem segmenata izračunavamo vrijednost I_4^0 te pomoću I_2^0 i I_4^0 dobivamo vrijednost I_4^1. Richardsonovom ekstrapolacijom iz I_2^1 i I_4^1 izračunavamo vrijednost I_4^2, te provjeravamo je li zadovoljen uvjet točnosti. Ako to nije slučaj, udvostručavanjem segmenata dobivamo I_8^0 te iz vrijednosti I_4^0 i I_8^0 izračunavamo vrijednost I_8^1. Richardsonovom ekstrapolacijom iz I_2^1 i I_4^1 izračunavamo vrijednost I_4^2, a iz I_4^1 i I_8^1 izračunavamo I_8^2. Ponavljanjem postupka iz vrijednosti I_4^2 i I_8^2 izračunavamo posljednju aproksimativnu vrijednost I_8^3. U slučaju da je odabran premali broj segmenata u trapeznim formulama i posljednja aproksimativna vrijednost nije dovoljno blizu vrijednosti integrala, potrebno je dodatno udvostručiti segmente i novom produljenom trapeznom formulom ponoviti postupak.

Nakon dobivanja aproksimativnih vrijednosti izvodimo omjere grešaka pomoću kojih procjenjujemo razvoj greške, a još bolji uvid u razvoj greške daju eksponenti omjera grešaka u

Rombergovoj tablici. Uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije iz ocjene greške možemo izvesti omjere grešaka prema formuli:

$$\frac{E_n^k}{E_{2n}^k} \approx 2^{2k+2}.$$

U tom slučaju bi omjeri u tablici trebali biti:

1				
4	1			
4	16	1		
4	16	64	1	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

Promatranjem omjera grešaka i eksponenata omjera grešaka u Rombergovoj tablici možemo proučiti i provjeriti ispravnost postupka i točnost izračuna, kao i ponašanje funkcije.

Metodom Rombergovog algoritma u pravilu brže dolazimo do najbolje aproksimativne vrijednosti zadanog integrala, no učinkovitost primjene Rombergovog algoritma ovisi i o svojstvima funkcije. Primjerice, u slučajevima nepostojanja derivacija u funkciji omjeri pogrešaka u Rombergovoj tablici stabiliziraju se u određenom stupcu tablice, ovisno o funkciji, i tada se ovoj metodi može pomoći primjenom supstitucije u integralu čime dobijemo glatku funkciju. Nadalje, u oscilirajućim funkcijama može doći do problema u izračunu zbog nedovoljnog broja podsegmenata u trapeznoj formuli koji ne opisuju dobro „ponašanje" funkcije, što je moguće korigirati dodavanjem točaka, odnosno korigiranjem broja podsegmenata potrebnih za točniji izračun. Jednako tako kod periodičkih je funkcija slučaj da trapezna formula brže može izračunati točan rezultat nego Rombergov algoritam zbog „dobrog" ponašanja produljene trapezne formule za periodičke funkcije. U ovom je slučaju sporost Rombergovog algoritma posljedica činjenice da trapezna formula s jednim podsegmentom ima veliku grešku, a budući da ona ulazi u ekstrapolaciju rezultata na „dijagonali", rezultati su pogrešni. I za ovaj slučaj postoji rješenje, a to je uspoređivanje stupaca tablice i ako se oni podudaraju na odgovarajuću točnost, tada se uzimaju za aproksimaciju [6].

Može se zaključiti da Rombergov algoritam najbrže dolazi do točnosti aproksimacije kad je funkcija dovoljno glatka i da postoje metode „ispravljanja" s ciljem poboljšanja Rombergovog algoritma.

4.2. PRIMJENA ROMBERGOVOG ALGORITMA

Pokažimo primjenu Rombergovog algoritma na zadanom integralu

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

i odredimo aproksimaciju desetog reda točnosti $O(h^{10})$.

Zadana podintegralna funkcija derivabilna je beskonačno puta, odnosno za podintegralnu funkciju vrijedi da je klase C^∞, stoga očekujemo predviđeno ponašanje omjera grešaka u tablici.

Izračun započinjemo trapeznom formulom za broj segmenata $n=1$ pa nastavljamo prvom produljenom trapeznom formulom s $n=2$.

$$I_1^0 = \frac{h}{2}\big(f(a) + f(b)\big),$$

$$I_1^0 = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(1)\big) = 1.85914091422952 \ldots$$

$$I_2^0 = \frac{h}{2}\big(f(a) + 2f(x_1) + f(b)\big),$$

$$I_2^0 = \frac{1}{4}\big(f(0) + 2f(0.5) + f(1)\big) = 1.75393109246482 \ldots$$

Iz dvije dobivene aproksimacije drugog reda točnosti izračunat ćemo prvu aproksimaciju četvrtog reda točnosti:

$$I_2^1 = \frac{4I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1},$$

$$I_2^1 = \frac{4I_2^0 - I_1^0}{3} = 1.71886115187659 \ldots$$

S obzirom da tražimo veći red točnosti, izračunat ćemo novu produljenu trapeznu formulu s 4 podsegmenta:

$$I_4^0 = \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\big) + f(b)\Big),$$

$$I_4^0 = \frac{1}{8}\Big(f(0) + 2\big(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\big) + f(1)\Big) = 1.72722190455751 \ldots$$

Sada računamo novu aproksimaciju četvrtog reda točnosti koristeći trapezne formule I_2^0 i I_4^0:

$$I_4^1 = \frac{4I_n^{(k-1)} - I_{n/2}^{(k-1)}}{4^k - 1},$$

$$I_4^1 = \frac{4I_4^0 - I_2^0}{3} = 1.71831884192174 \ldots$$

Računamo prvu aproksimaciju šestog reda točnosti:

$$I_4^2 = \frac{16I_4^1 - I_2^1}{15} = 1.71828268792475 \ldots$$

Daljnjim udvostručavanjem broja podsegmenata u produljenim trapeznim formulama te izračunavanjem potrebnih aproksimacija, konačno dolazimo do

$$I_8^3 = \frac{64I_8^2 - I_4^2}{63} = 1.71828182879453 \ldots$$

$$I_{16}^3 = \frac{64I_{16}^2 - I_8^2}{63} = 1.71828182846038 \ldots$$

iz kojih možemo izračunati traženu aproksimaciju desetog reda točnosti

$$I_{16}^4 = \frac{256I_{16}^3 - I_8^3}{255} = 1.71828182845907 \ldots$$

Formirajmo sada tablicu aproksimacija u kojoj ćemo istaknuti znamenke koje se podudaraju s vrijednosti integrala:

O(h^2)	*O*(h^4)	*O*(h^6)	*O*(h^8)	*O*(h^{10})
1.85914091422952…				
1.75393109246482…	1.71886115187659…			
1.72722190455751…	1.71831884192174…	1.71828268792475…		
1.72051859216430…	1.71828415469989…	1.71828184221844…	1.71828182879453…	
1.71884112857999…	1.71828197405189…	1.71828182867535…	1.71828182846038…	1.71828182845907…

Tablica 2. Vrijednosti aproksimacija

Možemo primijetiti da se napredovanjem Rombergovog algoritma povećava podudaranje aproksimacija s vrijednosti integrala, odnosno približavamo se vrijednosti integrala.

Radi lakšeg uvida u tijek Rombergovog algoritma prikažimo i tablicu apsolutnih grešaka dobivenih aproksimacija:

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$
1.4085×10^{-1}				
3.5649×10^{-2}	5.7932×10^{-4}			
8.9401×10^{-3}	3.7013×10^{-5}	8.5947×10^{-7}		
2.2368×10^{-3}	2.3262×10^{-6}	1.3759×10^{-8}	3.3548×10^{-10}	
5.5930×10^{-4}	1.4559×10^{-7}	2.1631×10^{-10}	1.3429×10^{-12}	3.286×10^{-14}

Tablica 3. Greške aproksimacija

Iz tablice je vidljivo da se dolaskom do postavljenog kriterija točnosti i porastom reda točnosti greška aproksimacija smanjuje.

Sad je moguće prikazati i tablicu omjera grešaka koje smo, uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije, izračunali formulom:

$$\frac{E_n^k}{E_{2n}^k} \approx 2^{2k+2}$$

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$
1.0000000				
3.9436742	1.0000000			
3.9875814	15.6516948	1.0000000		
3.99687998	15.9112771	62.4639173	1.0000000	
3.99921908	15.977714	63.6087378	249.8164604	1.0000000

Tablica 4. Omjeri grešaka

Zaključujemo da se omjeri grešaka ponašaju prema predviđenom.

Moguće je prikazati i tablicu eksponenata omjera grešaka koji su izračunati formulom:

$$2k + 2 = \log\left(\frac{E_n^k}{E_{2n}^k}\right)/\log(2)$$

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$
1.0000000				
1.9795403	1.0000000			
1.9955139	3.968247	1.0000000		
1.99887425	3.991978	5.9649511	1.0000000	
1.99971832	3.997989	5.9911531	7.9647247	1.0000000

Tablica 5. *Eksponenti omjera grešaka*

Eksponenti omjera grešaka također se ponašaju prema predviđenom.

Za dobivanje aproksimacije točnosti $O(h^{10})$ korištenjem isključivo produljene trapezne formule bio bi nam potreban iznimno veliki broj podsegmenata ($n \geq 47\,595$). Iz primjera je vidljivo da se Rombergovim algoritmom vrlo brzo dolazi do aproksimacije vrijednosti integrala željene točnosti, kao i da se greška također brzo smanjuje svakom sljedećom iteracijom.

5. ZAKLJUČAK

Radom je teorijski i praktično na zadatku prikazan Rombergov algoritam, metoda numeričke integracije čiji se izračun temelji na udvostručavanju broja podsegmenata u produljenoj trapeznoj formuli i eliminaciji člana greške iz dvije susjedne produljene formule čija se ponovljena primjena naziva Richardsonova ekstrapolacija. Računanjem aproksimacije višeg reda točnosti poboljšava se točnost aproksimacije. Dobivene se vrijednosti unose u Rombergovu tablicu, a proučavanjem ponašanja omjera grešaka i eksponenata omjera grešaka potvrđujemo ispravnost postupka i točnost izračuna. Izvod Rombergovog algoritma prikazan je izvodom općih formula uz pretpostavku dovoljne glatkoće funkcije, nakon čega je isto oprimjereno zadatkom. Primjenom navedenih principa u izračunu dolazi se do točnije aproksimativne vrijednosti početnog integrala.

Brzina i točnost izračuna Rombergovim algoritmom ovisi o svojstvima funkcije, kao što su funkcije u kojima na nekim mjestima unutar promatranog segmenta ne postoji derivacija, oscilirajuće i periodičke funkcije, no tada se korektivnim mehanizmima dolazi do aproksimacija sa zadovoljavajućim stupnjem točnosti. Rombergov algoritam zanimljiva je metoda numeričke integracije koja koristi i kombinira jednostavnije numeričke metode kako bi se što brže došlo do izračuna aproksimativne vrijednosti integrala sa što manjom greškom, što i jest glavna vodilja numeričke analize i numeričke matematike u cijelosti. Funkcioniranje i primjena Rombergovog algoritma, kao i posebnosti njegova izračuna, svakako su motiv za daljnja istraživanja ovog područja.

POPIS SLIKA I TABLICA

Slika 1. Trapezna formula ______ 5
Slika 2. Usporedba vrijednosti površina ispod pravca $p_1(x)$ i grafa funkcije $f(x)$ ______ 6
Slika 3. Produljena trapezna formula ______ 7

Tablica 1. Vrijednosti Bernoullijevih brojeva za $n = 0, 1, 2, ..., 10$ ______ 10
Tablica 2. Vrijednosti aproksimacija ______ 17
Tablica 3. Greške aproksimacija ______ 18
Tablica 4. Omjeri grešaka ______ 18
Tablica 5. Eksponenti omjera grešaka ______ 19

POPIS LITERATURE

[1] Z. Drmač, M. Marušić, S. Singer, V. Hari, M. Rogina, S. Singer, „Numerička analiza“, 2003. [Na internetu.] Dostupno: https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf [pristupano: lipanj, srpanj 2023.]

[2] S. Singer, „Numerička matematika“, 2020. [Na internetu.] Dostupno: https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/NM_1920/01.pdf [pristupano: lipanj, srpanj 2023.]

[3] R. Scitovski, „Numerička matematika“, 2004. [Na internetu.] Dostupno: https://www.mathos.unios.hr/pim/Materijali/Num.pdf [pristupano: lipanj, srpanj 2023.]

[4] S. Bujačić Babić, „Numerička matematika, Greške (predavanje)“, nastavni materijali na predmetu Numerička matematika [Moodle], Sveučilište u Rijeci, Fakultet informatike i digitalnih tehnologija, Rijeka, 2023.

[5] S. Bujačić Babić, „Numerička matematika, Numerička integracija (predavanje)“, nastavni materijali na predmetu Numerička matematika [Moodle], Sveučilište u Rijeci, Fakultet informatike i digitalnih tehnologija, Rijeka, 2023.

[6] S. Singer, „Numerička matematika“, 2010. [Na internetu.] Dostupno: https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/nm_12.pdf [pristupano: lipanj, srpanj 2023.]

[7] M. Ribičić Penava, A. Nuić, „Bernoullijevi polinomi“, 2018. [Na internetu.] Dostupno: https://hrcak.srce.hr/file/324797 [pristupano: lipanj, srpanj 2023.]

[8] S. Kurepa, „Matematička analiza 1“, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[9] S. Kurepa, „Matematička analiza 2“, Školska knjiga, Zagreb, 1997.