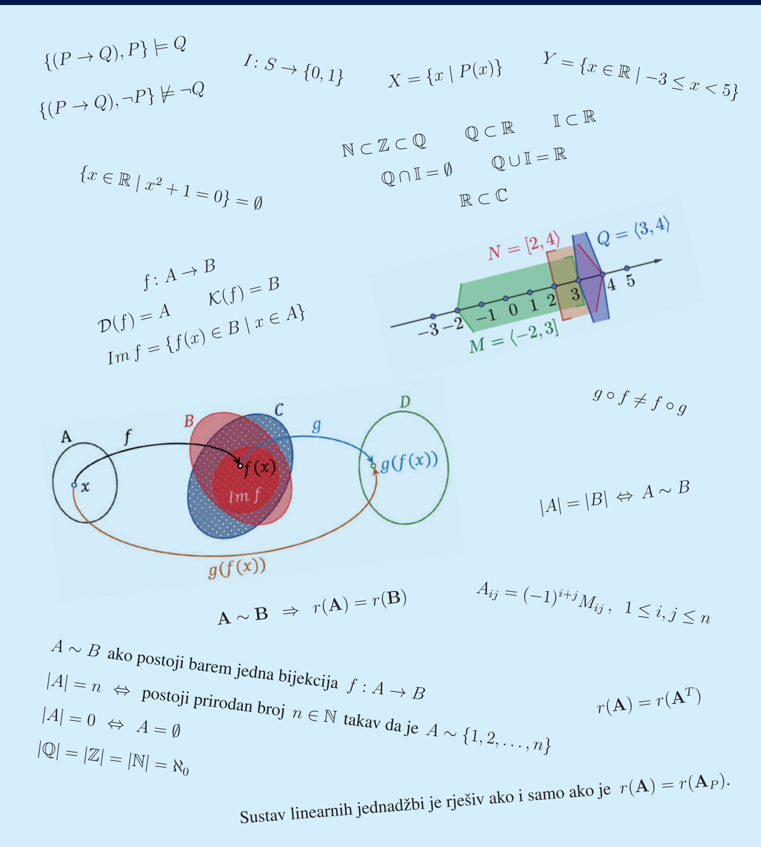
Milena Sošić

Matematika 1



Sveučilište u Rijeci
Fakultet informatike i digitalnih tehnologija

Udžbenici Sveučilišta u Rijeci

Manualia Universitatis studiorum Fluminensis

doc. dr. sc. Milena Sošić, Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci

Matematika 1

Izdavač:

Fakultet informatike i digitalnih tehnologija, Sveučilište u Rijeci

Recenzenti:

prof. dr. sc. Zlatko Erjavec, Fakultet organizacije i informatike, Sveučilište u Zagrebu

izv. prof. dr. sc. Danijel Krizmanić, Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci

Lektura:

Željka Lopac Purković, prof. hrv. jezika i književnosti

Grafičko oblikovanje:

Grafika Helvetica d.o.o. za Centar za elektroničko nakladništvo Sveučilišne knjižnice u Rijeci

Rijeka, 2022.

ISBN: 978-953-7720-66-7 (PDF)

UDK: 51(075.8)

Odlukom Senata Sveučilišta u Rijeci (KLASA: 007-01/22-03/02, URBROJ: 2170-57-01-22-385, od 25. Listopada 2022. godine) ovo se djelo objavljuje kao izdanje Sveučilišta u Rijeci.

Sveučilište u Rijeci pokriva trošak e-izdanja koje obavlja Centar elektroničkog nakladništva (CEN).

Predgovor

Gradivo u ovom udžbeniku je prilagođeno nastavnom planu i programu kolegija Matematika 1 preddiplomskog studija Informatika na Odjelu za informatiku (Fakultetu informatike i digitalnih tehnologija) Sveučilišta u Rijeci. Udžbenik je proizašao iz višegodišnjeg nastavnog iskustva predavanja i vježbi navedenog kolegija s ciljem usvajanja temeljnih znanja o pojmovima i rezultatima osnova matematike (osnove matematičke logike, skupovi, relacije, funkcije) i linearne algebre (matrice, determinante, sustavi linearnih jednadžbi) koji su neophodni za primjenu matematičkih znanja u informacijskim znanostima.

Udžbenik je podijeljen na jedanaest poglavlja od kojih prvih deset obuhvaća detaljno razrađene teorijske matematičke sadržaje propisane nastavnim planom kolegija Matematika 1 Sveučilišnog preddiplomskog studija informatike, a jedanaesto poglavlje sastoji se od brojnih zadataka za vježbu koji su podijeljeni u odjeljke usklađeno s obrađenim gradivom u prethodnim poglavljima.

U svakom poglavlju, uz teorijski dio, objašnjeni su i riješeni različiti primjeri s ciljem da se studentima olakša svladavanje gradiva i potiče na ovladavanje matematičkom tehnikom rješavanja zadataka te za njihovo osposobljavanje na logičko razmišljanje i primjenu matematičkog znanja u znanosti i gospodarstvu.

Rijeka, 2022.

Sadržaj

1 Struktura matematike

1.1 Osnovni pojmovi i definicije

U matematici, kao i u svim prirodnim znanostima, ali i u svim znanostima općenito, uz riječi iz svakodnevnog života čije nam je značenje poznato vrlo često se koriste i *stručne riječi* (pojmovi, izrazi) čije nam značenje nije poznato, stoga ih treba **definirati**, odnosno objasniti.

> Pod definiranjem određenog pojma (stručne riječi, izraza) podrazumijeva se davanje detaljnih i jasnih formulacija, odnosno objašnjenja, iz kojih je razumljivo što se pod tim pojmom razumijeva. Pri tome se koriste osnovni pojmovi i prethodno definirani pojmovi.

Osnovni pojam, kao i što sama riječ sugerira, je pojam koji se ne može objasniti nekim drugim (jednostavnijim) pojmom. Njega najčešće objašnjavamo tako da navedemo primjere iz svakodnevnog života čime se zapravo omogućava shvaćanje što se njime podrazumijeva.
Primjeri osnovnog pojma su: *skup*, *točka*, *ravnina*, ...

Nadalje, pomoću osnovnog ili osnovnih pojmova definiraju se pojmovi koji se nadalje koriste u definiciji novih pojmova. Time se pri definiranju svakog novog pojma koriste prethodno definirani pojmovi i/ili osnovni pojmovi.

Dakle, u definiciji nekog pojma često se nailazi na ”lanac” objašnjenja tog pojma nekim drugim pojmovima koji su prethodno definirani (objašnjeni) osnovnim pojmom (pojmovima) ili prethodno definiranim pojmom (pojmovima).

Konkretno, na primjer kružnica je stručna riječ, odnosno matematički pojam koji se definira na sljedeći način:

> *Kružnica je skup svih točaka u istoj ravnini koje su jednako udaljene od neke zadane točke te ravnine.*

Dana definicija kružnice biti će jasna i razumljiva jedino ako su prethodno dobro objašnjeni osnovni pojmovi skupa, točke i ravnine kao i pojam skup svih točaka u istoj ravnini (ili skup točaka ravnine) i ako je prethodno definirana udaljenost točaka u ravnini.

- Svaka definicija mora biti jasna, precizna, točna, sažeta i ne smije biti dvosmislena.

Primijetimo da sljedeća formulacija:

> *Kružnica je skup nekih točaka u istoj ravnini koje su jednako udaljene od neke zadane točke te ravnine*

nije dobra definicija kružnice, jer se u njoj navode neke točke (umjesto sve točke) u istoj ravnini, što ima za posljedicu da se danom formulacijom ne dobiva cijela kružnica u ravnini, već samo jedan (ili više) njenih dijelova.

S druge strane formulacija:

> *Skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od jedne njezine odabrane točke zove se kružnica.*

je dobra definicija kružnice.

1.2 Aksiomi i teoremi

Kao što se svaki pojam ne može definirati, tako se i svaka tvrdnja ne može dokazati. Neke tvrdnje smatramo istinitima bez dokaza, a zovemo ih *osnovne tvrdnje* ili **aksiomi**. Tvrdnje koje dokazujemo zovemo *dokazne tvrdnje* ili **teoremi**.

Dakle, **aksiomi** su odabrane tvrdnje koje ne dokazujemo, a **teoremi** su tvrdnje koje dokazujemo. Aksiome možemo koristiti u dokazivanju teorema.

Primjeri aksioma:

- ◇ *Jedan je prirodan broj.*
- ◇ *Svaki prirodan broj ima sljedbenika.*
- ◇ *Za svake dvije različite točke postoji jedinstven pravac kojemu one pripadaju.*
- ◇ *Na svakom pravcu leže bar tri različite točke.*

Primjeri teorema:

- ○ *Kvadrat neparnog broja je neparan broj.*
- ○ *Umnožak dva uzastopna parna broja je djeljiv s 8.*
- ○ *Zbroj veličina kuteva u trokutu iznosi 180 stupnjeva.*
- ○ *Dijagonale romba su okomite.*

U formulaciji teorema razlikujemo dva dijela: ***pretpostavku*** i ***konkluziju (zaključak)***.
U pretpostavci se navode uvjeti pod kojima vrijedi konkluzija (tj. ono što se tvrdi i što treba dokazati).

Teoremi se najčešće izražavaju kondicionalnim (uvjetnim, pogodbenim) rečenicama:

Ako je ..., onda je ...

Takve se tvrdnje zovu i **hipotetički sudovi**.

Primjer:

> *Teorem 1: Ako je neki broj paran, onda je i njegov kvadrat paran.*

Ako u teoremu međusobno zamijenimo pretpostavku i konkluziju (tako da konkluziju uzmemo za pretpostavku, a pretpostavku za konkluziju), onda dobivamo novu tvrdnju koja se naziva *obrat danog teorema.*

Primjer:

Obrat Teorema 1: Ako je kvadrat nekog broja paran, onda je i sam broj paran.

Lako se vidi da vrijedi obrat Teorema 1.

Teoremi se izražavaju i bikondicionalnim rečenicama:

... ako i samo ako ...

kojima se podrazumijeva da za neki teorem vrijedi i obrat tog teorema.

Budući da za Teorem 1 vrijedi i njegov obrat, zaključujemo da se Teorem 1 može izraziti i u obliku bikondicionalne rečenice:

Teorem: Broj je paran ako i samo ako je i njegov kvadrat paran.

Važno:

- obrat nekog teorema ne mora biti valjan.

Primjer:

Teorem 2: Ako je svaki od brojeva a i b djeljiv s c, onda je i broj $a + b$ djeljiv s c.

Obrat Teorema 2: Ako je broj $a + b$ djeljiv s c, onda je svaki od brojeva a i b djeljiv s c.

Uočimo da obrat teorema 2 nije valjan, jer npr. broj $4 = 3 + 1$ je djeljiv s 2, ali brojevi 3 i 1 nisu djeljivi s 2. Dakle, u ovom slučaju Teorem 2 ne može se izraziti u obliku bikondicionalne rečenice.

Dokaz teorema logički proizlazi iz aksioma, definicija ili prethodno dokazanih teorema.

Ako želimo dokazati da neka tvrdnja nije istinita (točna, valjana) dovoljno je navesti jedan kontraprimjer kojim se pokazuje da dana tvrdnja nije istinita.

S druge strane, općenito istinitost neke tvrdnje **ne može se zasnivati na primjerima** za koje vrijedi ta tvrdnja.
Istinitost tvrdnje mora se zasnivati na dokazu, odnosno logičkom zaključivanju koji proizlazi iz aksioma, definicija ili prethodno dokazanih teorema.

Razlikujemo direktan i indirektan dokaz teorema.

Direktan dokaz: polazi se od pretpostavke i primjenom aksioma, definicija ili dokazanih teorema, nizom koraka izvodi se istinitost zadane tvrdnje.

Indirektan dokaz: pretpostavlja se suprotno od onog što se tvrdi te se primjenom aksioma, definicija ili dokazanih teorema dolazi do kontradikcije. Time se zaključuje da postavljena suprotna tvrdnja ne može vrijediti, već da vrijedi polazna tvrdnja.

Općenito, svaka dokazana tvrdnja koje nije aksiom je teorem. Međutim radi preglednosti i lakšeg uočavanja važnijih tvrdnji, uvode se posebni nazivi za teoreme.

- Propozicija je manje važna tvrdnja od teorema. Za razliku od teorema, propozicija nije glavna tvrdnja koju u nekom djelu, radu ili članku dokazujemo.
- Lema je pomoćna jednostavnija tvrdnja koju koristimo u dokazu glavne tvrdnje tj. teorema.
- Korolar je tvrdnja koja je jednostavna posljedica prethodno dokazanog teorema. Istinitost korolara proizlazi iz dokaza ili formulacije teorema iz kojeg je proizašao.
- Zakon je neki važniji teorem koji se često koristi u matematici ili fizici.

  Konkretno: De Morganov zakon; Arhimedov zakon, Newtonov zakon.

1.3 Deduktivna (aksiomatska) izgradnja matematike

Svaku matematičku granu izgrađujemo tako da polazimo od osnovnih pojmova (pojmova koje ne definiramo) i od odabranih aksioma (tvrdnji koje ne dokazujemo), gdje se novi pojmovi (koji nisu osnovni) uvode definicijom i nove tvrdnje (koje nisu aksiomi) dokazuju iz aksioma, definicija ili prethodno dokazanih teorema.
Takav način izgradnje nazivamo *deduktivnim* (aksiomatskim), jer pojmove koje definiramo i tvrdnje koje dokazujemo deduciramo (tj. izvodimo) iz osnovnih pojmova i aksioma logičkim pristupom bez utjecaja zora ili iskustva. Dakle, svaki aksiomatski sustav sastoji se od: skupa osnovnih pojmova, skupa aksioma, zakona logičkog zaključivanja i skupa teorema koji slijede iz aksioma, definicija ili prethodno dokazanih teorema.

Navedimo da se matematika (i njezine grane) ne izgrađuju samo deduktivno, već i induktivno. Pritom se promatraju i proučavaju pojedinačni slučajevi nakon čega se dolazi do uopćavanja.

2 Osnove matematičke logike

U ovom poglavlju razmatrat će se osnovni pojmovi i problemi u matematičkoj logici, koji se odnose na ispitivanje istinitosti neke suvisle izjavne rečenice. Pritom će se promatrati samo oblik rečenica, ali ne i njihov sadržaj. Drugim riječima, promatrat će se logičke forme u logici sudova koja je ujedno jedna od najjednostavnijih formalnih teorija.
Dakle, općenito neće se promatrati sve rečenice, već samo one za koje se može odrediti njihova vrijednost (istinita ili lažna), a potom će se one zapisati u obliku formi (logičkih formula) sastavljenih od atomarnih dijelova (propozicijskih varijabli i logičkih konstanti) povezanih logičkim veznicima (*ne, i, ili, ako je ..., onda je, ... ako i samo ako ...*).

2.1 Logika sudova

- **Sud** je svaka suvisla izjavna rečenica koja je istinita ili lažna (neistinita), ali ne oboje.

Primjer 2.1

Objasnimo pojam suda pomoću nekoliko primjera:

- Rečenica ”*Tri plus pet jednako je osam.*” je sud, i to istinit.
- Rečenica ”*Tri plus pet jednako je deset.*” je sud, i to lažan.
- Rečenica ”*Pet minus tri jednako je jedan.*” je sud, i to lažan.
- Rečenica ”x *plus četiri jednako je sedam.*” nije sud.

  Uočimo da je ova rečenica istinita jedino ako je $x = 3$, a u protivnom je neistinita. Općenito za ovu rečenicu ne možemo reći je li ona istinita ili neistinita, sve dok ne kažemo koliko iznosi x. Dakle, ova rečenica može biti istinita ili neistinita u ovisnosti o vrijednosti varijable x, stoga ona nije sud.

- Rečenice ”*Koliko je sati?*” ”*Kako si?*” ”*Koji je danas dan?*”
  nisu sudovi, jer one nisu izjavne rečenice.
- Rečenice ”*Dobar dan.*” ”*Izračunajte* $5 \cdot 3 - 7$”
  ”*Nacrtajte graf linearne funkcije* $f(x) = 3x - 4$”
  nisu sudovi, jer one nisu izjavne rečenice.
- Rečenica ”*Danas je ponedjeljak.*” nije sud.
  Riječ ”*danas*” je u svakodnevnom životu vrlo učestala riječ, no ona općenito ne govori o kojem se danu radi, stoga nam ona onemogućava određivanje istinitosti ili neistinitosti rečenice.
- Rečenica ”*12.10.2020. je ponedjeljak.*” je sud, i to istinit.

- Rečenica *"12.10.2020. je srijeda."* je sud, i to lažan.
- Rečenica *"Ja sada lažem."* nije sud.

  Ako pretpostavimo da je rečenica *"Ja sada lažem."* istinita, onda sam ja lagala pa je ono što sam rekla lažno (što je u kontradikciji s pretpostavkom istinitosti rečenice).

  S druge strane, ako pretpostavimo da je rečenica *"Ja sada lažem."* neistinita, onda ja nisam lagala pa je ono što sam rekla istinito (što je u kontradikciji s pretpostavkom neistinitosti rečenice). Dakle, za ovu rečenicu ne možemo reći ni da je istinita, niti da je neistinita.

Sudovi se u matematici (matematičkoj logici) zapisuju **logičkim formulama** koje kraće nazivamo **formulama**. Prije definicije formule, objasnimo najprije pojmove atomarnih formula, logičkih konstanti i logičkih veznika.

Definicija 2.2

Propozicijske varijable označavamo s: $P, Q, R, S \dots$ ili ponekad s: $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$, a **logičke konstante** s: $\top$ i $\bot$, gdje se $\top$ naziva istina, a $\bot$ laž.

Atomarna formula je svaka propozicijska varijabla ili logička konstanta.

Definicija 2.3

Logički veznici se redom nazivaju:

$\neg$	**negacija**
$\wedge$	**konjunkcija**
$\vee$	**disjunkcija**
$\rightarrow$	**kondicional**
$\leftrightarrow$	**bikondicional**

Definicija 2.4

Formule ćemo označavati velikim slovima $A, B, C, F, F_1, F_2, \dots$

Pojam **formule** (logičke formule) definira se induktivno:

1. Svaka atomarna formula je formula.
2. Ako su A i B formule, onda su i $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ formule.

Svaka formula nastaje primjenom konačno mnogo koraka iz uvjeta 1. i 2.

♢ Drugim riječima, svaka formula se rekurzivno gradi pomoću atomarnih ili prethodno formiranih formula koje povezujemo logičkim veznicima tako da ispred svake formule stavimo negaciju ili da između dviju formula stavimo jedan od logičkih veznika: konjukcije, disjunkcije, kondicionala, bikondicionala. Postupak se može nastavljati samo konačno mnogo puta.

U nastavku ćemo sa S označavati skup formula.

Primjer 2.5

Primjeri formula: $\neg P \vee (P \wedge Q) \rightarrow Q$

$((P \leftrightarrow Q) \vee P) \wedge (R \rightarrow Q)$

$P \leftrightarrow Q$

$(\neg(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge \neg R)) \leftrightarrow (\neg((R \rightarrow Q) \wedge R) \vee P)$

Pritom su P, Q, R neke atomarne ili prethodno formulirane formule.

Neka su $P_1, P_2, P_3, \ldots$ formule. Tada npr.

$$\begin{aligned}
&P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \\
&P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee \ldots \\
&P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \ldots \\
&P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow P_3 \leftrightarrow \ldots
\end{aligned}$$

navedeni izrazi (rečenice) nisu formule, jer su oni sastavljeni od beskonačno mnogo formula i logičkih veznika - vidi definiciju 2.4.

U nastavku ćemo definirati što znači da je neka formula istinita, odnosno lažna (neistinita).

Definicija 2.6

Svako preslikavanje $I\colon S \rightarrow \{0,1\}$ sa skupa formula S u skup $\{0,1\}$ naziva se **interpretacija** i kažemo

- **formula F je istinita za interpretaciju** I ako je $I(F) = 1$
  (tj. ako je vrijednost interpretacije I na formuli F jednaka jedan);
- **formula F je lažna (neistinita) za interpretaciju** I ako je $I(F) = 0$
  (tj. ako je vrijednost interpretacije I na formuli F jednaka nuli).

Nadalje, vrijedi:

$$I(S) = 1 \quad \text{ako i samo ako je} \quad I(F) = 1 \quad \text{za svaki} \quad F \in S$$

i analogno

$$I(S) = 0 \quad \text{ako i samo ako je} \quad I(F) = 0 \quad \text{za svaki} \quad F \in S,$$

gdje S označava skup formula.

Pritom za logičke konstante $\top$ (istina) i $\perp$ (laž) vrijedi: $\quad I(\top) = 1, \quad I(\perp) = 0.$

◇ Drugim riječima, interpretacija je pridruživanje istinite ili lažne vrijednosti svakoj formuli iz skupa formula. Dakle, svakoj formuli F se jednom interpretacijom I pridružuje vrijednost 1 ili 0, što se interpretira da je formula F istinita ili lažna za interpretaciju I.

Nadalje, kažemo da je skup svih formula istinit za interpretaciju I ako i samo ako je svaka formula iz skupa svih formula istinita za interpretaciju I.

Analogno, kažemo da je skup svih formula lažan za interpretaciju I ako i samo ako je svaka formula iz skupa svih formula lažna za interpretaciju I.

Definicija 2.7

Neka je $I\colon S \to \{0,1\}$ interpretacija i neka su A i B proizvoljne formule iz skupa S ($A, B \in S$). Tada se vrijednost interpretacije I na proizvoljnoj formuli definira induktivno:

$$\begin{array}{lll}
I(\neg A) = 1 & \text{ako i samo ako je} & I(A) = 0; \\
I(A \wedge B) = 1 & \text{ako i samo ako je} & I(A) = 1 \ \text{ i } \ I(B) = 1; \\
I(A \vee B) = 1 & \text{ako i samo ako je} & I(A) = 1 \ \text{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \to B) = 1 & \text{ako i samo ako je} & I(A) = 0 \ \text{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \leftrightarrow B) = 1 & \text{ako i samo ako je} & I(A) = I(B).
\end{array}$$

Napomena:

Veznik "ili" shvaćamo inkluzivno. Konkretno: $I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$ znači da je ili $I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$ ili oboje $I(A) = 1$ i $I(B) = 1$.

Indukcijom po složenosti proizvoljne formule F definira se vrijednost interpretacije I na formuli F.

Vrijednosti interpretacija na formulama mogu se preglednije zapisati i pomoću tablica koje se nazivaju **semantičke tablice**. Tada obzirom na definiciju 2.7 proizlaze sljedeće semantičke tablice:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

U svakom retku semantičkih tablica predstavljena je jedna interpretacija formule.

Primjer 2.8

Neka su $A, B, C \in S$ proizvoljne formule i neka je zadana interpretacija $I\colon S \to \{0,1\}$ na sljedeći način:

$$I(A) = I(B) = 0 \quad \text{i} \quad I(C) = 1.$$

Odredimo vrijednost interpretacije I na formuli $\quad F \equiv (\neg A \vee B) \to \neg(C \leftrightarrow (B \vee \neg C))$.

Rješenje:

Određivanje tražene vrijednosti provesti ćemo pomoću semantičke tablice za zadanu interpretaciju I na formuli F. Pritom uvodimo pokrate:

$$F \equiv F_1 \rightarrow \neg F_2$$

gdje je:

$$F_1 \equiv (\neg A \vee B) \quad \text{i} \quad F_2 \equiv (C \leftrightarrow (B \vee \neg C)).$$

A	B	C	$\neg A$	F_1	$\neg C$	$B \vee \neg C$	F_2	$\neg F_2$	F
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1

Dobili smo da je $I(F) = 1$, stoga zaključujemo da je zadana formula F istinita za zadanu interpretaciju I.

- Za zadanu formulu $F \equiv (\neg A \vee B) \rightarrow \neg(C \leftrightarrow (B \vee \neg C))$ ispišite semantičku tablicu za sve moguće vrijednosti interpretacija I na formuli $F \in S$.

Rješenje:

A	B	C	$\neg A$	F_1	$\neg C$	$B \vee \neg C$	F_2	$\neg F_2$	$F_1 \rightarrow \neg F_2$
1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

U nastavku ćemo promatrati proizvoljnu formulu F iz skupa formula S i definirati kada će formula $F \in S$ biti ispunjiva, oboriva, tautologija, antitautologija.

Definicija 2.9

- Za formulu F kažemo da je **ispunjiva** ako postoji interpretacija I tako da je $I(F) = 1$.
- Za formulu F kažemo da je **oboriva** ako postoji interpretacija I tako da je $I(F) = 0$.
- Za formulu F kažemo da je **tautologija** (**valjana ili identički istinita**) ako je ona istinita za svaku interpretaciju.
- Za formulu F kažemo da je **antitautologija** (**identički neistinita**) ako je ona lažna (neistinita) za svaku interpretaciju.

Drugim riječima, formula F je ispunjiva ako postoji interpretacija I koja ju čini istinitom i analogno formula F je oboriva ako postoji interpretacija I koja ju čini lažnom (neistinitom). Nadalje, uspoređivanjem definicije 2.9 s definicijom 2.6 zaključujemo:

- formula koja je istinita za neku interpretaciju je ujedno i ispunjiva formula;
- formula koja je lažna za neku interpretaciju je ujedno i oboriva formula;
- formula koja je istinita za svaku interpretaciju je tautologija;
- formula koja je lažna za svaku interpretaciju je antitautologija;
- formula koja je tautologija je ujedno i ispunjiva, ali nije oboriva;
- formula koja je antitautologija je ujedno i oboriva, ali nije ispunjiva;
- formula koja je tautologija nije antitautologija i obratno; formula koja je antitautologija nije tautologija;
- ispunjiva formula općenito nije tautologija (osim ako je ispunjiva za svaku interpretaciju);
- oboriva formula općenito nije antitautologija (osim ako je oboriva za svaku interpretaciju);
- formula može biti i ispunjiva i oboriva;
- formula koja je ispunjiva i oboriva nije tautologija niti antitautologija.

Primijetimo da iz definicije 2.9 direktno proizlazi da će formula F biti ispunjiva i oboriva ako postoji neka interpretacija I za koju je F istinita i ako postoji neka druga interpretacija za koju je F lažna, odnosno ako je formula F istinita za neku interpretaciju i lažna za neku drugu interpretaciju.

Ⓢ Iz rečenog, lako se može uočiti da je formula F zadana u primjeru 2.8 ispunjiva i oboriva, ali nije tautologija niti antitautologija.

Definicija 2.10

Neka je S skup formula i F proizvoljna formula.

Kažemo da formula F **logički slijedi** iz skupa S i pišemo $S \models F$ ako za svaku interpretaciju I za koju je $I(S) = 1$ vrijedi da je $I(F) = 1$.

◇ Drugim riječima, formula F logički slijedi iz skupa S ako je formula F istinita za svaku interpretaciju za koju su sve formule iz skupa S istinite.

Primjer 2.11

Dokažimo da vrijedi:

(a) $\{(P \to Q), P\} \models Q$ (formula Q logički slijedi iz skupa $\{(P \to Q), P\}$)

(b) $\{(P \to Q), \neg P\} \not\models \neg Q$

(negacija formule Q logički ne slijedi iz skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$)

Rješenje:

(a) $\{(P \to Q), P\} \models Q$

Primijetimo da je $S = \{(P \to Q), P\}$ zadani skup formula (tj. skup S se sastoji od dviju formula: $(P \to Q)$ i P).

Primjenom definicije 2.10 formula Q će logički slijediti iz skupa $\{(P \to Q), P\}$ ako pokažemo da je formula Q istinita za svaku interpretaciju $I\colon \{(P \to Q), P\} \to \{0, 1\}$ sa skupa $\{(P \to Q), P\}$ na skup $\{0, 1\}$ za koju su obje formule P i $(P \to Q)$ istinite.

Zapišimo sada semantičku tablicu za sve moguće vrijednosti interpretacija na formulama P, Q i $(P \to Q)$:

P	Q	$P \to Q$
1	**1**	**1**
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primijetimo da su obje formule P i $P \to Q$ istinite samo za jednu interpretaciju (vidi prvi redak) za koju je istinita i formula Q. Time zaključujemo da vrijedi zadana tvrdnja:

$$\{(P \to Q), P\} \models Q$$

i kažemo da formula Q logički slijedi iz skupa $\{(P \to Q), P\}$.

(b) $\{(P \to Q), \neg P\} \not\models \neg Q$

U ovom slučaju se skup formula sastoji od sljedećih dviju formula: $(P \to Q)$ i $\neg P$.

Pritom oznaka $\not\models$ (logički ne slijedi) označava negaciju od $\models$ (logički slijedi).

Ispitajmo vrijedi li

$$\{(P \to Q), \neg P\} \models \neg Q$$

(da formula $\neg Q$ logički slijedi iz skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$).

Primjenom definicije 2.10 formula $\neg Q$ će logički slijediti iz skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$ ako pokažemo da je formula $\neg Q$ istinita za svaku interpretaciju $I\colon \{(P \to Q), \neg P\} \to \{0, 1\}$ sa skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$ na skup $\{0, 1\}$ za koju su obje formule $\neg P$ i $(P \to Q)$ istinite.

Zapišimo semantičku tablicu za sve moguće vrijednosti interpretacija na formulama $\neg P$, $(P \to Q)$ i $\neg Q$.

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg Q$
1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	1	**1**	**1**	**0**
0	0	**1**	**1**	**1**

Primijetimo da su obje formule $\neg P$ i $P \to Q$ istinite za dvije interpretacije (vidi treći i četvrti redak) te podsjetimo se da će formula $\neg Q$ logički slijediti iz skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$ jedino ako je za te dvije interpretacije i formula $\neg Q$ istinita.
Međutim, za jednu od tih dviju interpretacija formula $\neg Q$ je lažna (vidi treći redak), stoga zaključujemo da formula $\neg Q$ logički ne može slijediti iz skupa $\{(P \to Q), \neg P\}$ i pišemo:

$$\{(P \to Q), \neg P\} \not\models \neg Q.$$

Definicija 2.12

Ako je skup formula S jednočlani skup, tj. $S = \{A\}$, onda se

$$\{A\} \models B \quad \text{zapisuje i u obliku} \quad A \Rightarrow B$$

i čita: **formula A implicira formulu B**.

◇ Drugim riječima, kažemo da *formula A implicira formulu B* i pišemo $A \Rightarrow B$ ako je formula B istinita za svaku interpretaciju za koju je i formula A istinita.

Dakle, formula A implicira formulu B ako za svaku interpretaciju I za koju je $I(A) = 1$ vrijedi da je $I(B) = 1$.

Napomena:

Obratimo pozornost da se kondicional bitno razlikuje od implikacije.
Drugim riječima, **kondicional ne možemo poistovjetiti s implikacijom**.

A	B	$A \to B$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	1	1
0	0	1

Promatramo li semantičku tablicu za formulu $A \to B$ (A *kondicional* B), možemo uočiti da je formula A istinita za dvije interpretacije (vidi prvi i drugi redak), ali formula B nije istinita za obje interpretacije, stoga formula A ne implicira formulu B i pišemo $A \not\Rightarrow B$.

S druge strane pokazuje se da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2.13

Za bilo koje dvije proizvoljne formule A i B vrijedi

$$A \Rightarrow B \qquad \textit{ako i samo ako je} \qquad A \to B \quad \textit{tautologija (valjana formula).}$$

Uočimo da iz semantičke tablice za formulu $A \to B$ prozlazi da formula $A \to B$ nije tautologija, jer postoji jedna interpretacija za koju je formula $A \to B$ lažna (vidi drugi redak). Time zaključujemo da $A \not\Rightarrow B$.

Zadatak 2.14

Za vježbu provjerite vrijedi li:

1. $\{(P \to Q), (Q \to P)\} \models (P \leftrightarrow Q)$
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
3. $P \Rightarrow (P \vee Q)$
4. $(P \vee Q) \not\Rightarrow P$

Definicija 2.15

Kažemo da su formule A i B **logički ekvivalentne** i pišemo $A \Leftrightarrow B$ ako za svaku interpretaciju I vrijedi $I(A) = I(B)$.

◇ Drugim riječima, kažemo da su formule A i B *logički ekvivalentne* ako one imaju jednake istinitonosne vrijednosti za svaku interpretaciju I.

Primjer 2.16

Dokažimo da vrijedi: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Rješenje:

Treba provjeriti imaju li formule $A \to B$ i $\neg A \vee B$ jednake istinitonosne vrijednosti za svaku interpretaciju I. Ispišimo sematičke tablice za dane formule:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$
1
1
1
1

Uvedemo li oznake: $F_1 \equiv A \to B$ i $F_2 \equiv \neg A \vee B$,
tada iz danih tablica proizlazi da za svaku interpretaciju I vrijedi $I(F_1) = I(F_2)$, stoga primjenom definicije 2.15 proizlazi da su formule F_1 i F_2 logički ekvivalentne i pišemo $F_1 \Leftrightarrow F_2$.
Time je: $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$.

Pokazuje se da vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 2.17

Za bilo koje dvije proizvoljne formule A i B vrijedi

$$A \Leftrightarrow B \qquad \textit{ako i samo ako je} \qquad A \leftrightarrow B \quad \textit{tautologija (valjana formula).}$$

Primjenom definicije bikondicionala, uočimo da je formula $F_1 \leftrightarrow F_2$ tautologija, gdje je: $F_1 \equiv A \to B$ i $F_2 \equiv \neg A \vee B$, vidi primjer 2.16.

Zadatak 2.18

Za vježbu dokažite da vrijede sve tvrdnje slijedeća tri teorema.

Uputa: Sve tvrdnje vrijede, a dokazuju se analogno kao u prethodno navedenim primjerima.

Teorem 2.19

Neka su A i B proizvoljne formule, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow A \\ A \wedge (B \vee A) &\Leftrightarrow A \\ \neg(A \to B) &\Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \\ (A \leftrightarrow B) &\Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A) \end{aligned}$$

Teorem 2.20

Neka su A i B proizvoljne formule, tada vrijedi:

A	$\Rightarrow$	A	*zakon refleksivnosti*
$(A \to B) \to A$	$\Rightarrow$	A	*Pierceov zakon*
$\neg A$	$\Rightarrow$	$A \to B$	*zakon negacije premise*
$\neg(\neg A)$	$\Leftrightarrow$	A	*zakon dvojne negacije*
$A \wedge A$	$\Leftrightarrow$	A	*zakon idempotentnosti za konjukciju*
$A \vee A$	$\Leftrightarrow$	A	*zakon idempotentnosti za disjunkciju*
$\neg(A \wedge B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee \neg B)$	*De Morganov zakon*
$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg A \wedge \neg B)$	*De Morganov zakon*
$A \to B$	$\Leftrightarrow$	$\neg B \to \neg A$	*zakon kontrapozicije*

Teorem 2.21

Neka su A, B i C proizvoljne formule, tada vrijedi:

$(A \wedge B) \wedge C$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge (B \wedge C)$	*asocijativnost konjukcije*
$(A \vee B) \vee C$	$\Leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$	*asocijativnost disjunkcije*
$A \wedge (B \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	*distributivnost konjukcije prema disjunkciji*
$A \vee (B \wedge C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	*distributivnost disjunkcije prema konjukciji*

3 Skupovi

Skup je osnovni pojam koji se ne definira; njegovo značenje opisujemo kao kolekciju objekata koji zajedno čine cjelinu.

Ako neke objekte shvaćamo kao cjelinu, onda kažemo da oni čine skup sastavljen od tih objekata.

Kažemo da je skup dobro definiran (određen) ako za svaki objekt možemo odrediti je li on ili nije sadržan u tom skupu.

Ako je neki objekt sadržan u skupu, onda kažemo da je on element tog skupa.
Ako neki objekt nije sadržan u skupu, onda kažemo da on nije element tog skupa.

Skupove označavamo velikim štampanim slovima, a njihove elemente (članove) malim slovima.

- Konkretno, $S = \{a, b, c\}$ označava skup S koji je sastavljen od elemenata a, b i c.

  Dakle, a, b i c su sadržani u skupu S, stoga su a, b i c elementi skupa S i pišemo: $a \in S$, $b \in S$ i $c \in S$ (ili kraće: $a, b, c \in S$).

  Lako se vidi da d nije sadržan u skupu S, stoga d nije element skupa S i pišemo: $d \notin S$.

  Navedimo da se $a \in S$ ponekad zapisuje i u obliku $S \ni a$.

Primijetimo da npr. skup svih zanimljivih filmova ili dobrih pjesama ili smiješnih viceva nije dobro definiran skup (što znači ”zanimljiv”, ”dobar”, ”smiješan” - ovisi o subjektivnom doživljaju svake osobe).

Skup se zadaje tako da se navedu njegovi elementi, npr:

◇ $\{0, 1\}$ (skup sastavljen od elemenata 0 i 1);

◇ {ponedjeljak, utorak, srijeda, četvrtak, petak, subota, nedjelja}
(skup sastavljen od 7 elemenata: naziva dana u tjednu);

◇ $S = \{a, b, c\}$ (skup S sastavljen je od 3 elementa: a, b i c);

◇ $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ (skup A sastavljen je od n elemenata: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$);

◇ $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$
(skup B sastavljen je od (prebrojivo mnogo)[1] elemenata $b_1, b_2, b_3, \ldots$).

Skupovi se također zadaju i tako da se navede svojstvo, odnosno uvjet $P(x)$ koji moraju zadovoljavati svi njegovi elementi. Pišemo:

$$X = \{x \mid P(x)\} \quad \text{ili} \quad X = \{x : P(x)\}$$

[1] prebrojivost skupa obradit će se poglavlju *Ekvipotentni skupovi*

i interpretiramo da se skup X sastoji od svih onih elemenata x takvih da vrijedi svojstvo $P(x)$. Pritom se oznaka " | ", odnosno " : " čita: *takvih da je*.

Drugim riječima, skup X se sastoji od svih onih elemenata koji zadovoljavaju (imaju) svojstvo $P(x)$.

Primjer 3.1

Navedimo nekoliko primjera skupa zadanih uvjetom $P(x)$:

- $A = \{x \mid x \text{ je trokut u ravnini}\}$
  označava da se skup A sastoji od svih (mogućih) trokuta u ravnini;
- $D = \{x \mid x \text{ je matični broj građana RH}\}$;
- $M = \{y \mid y \text{ je matični broj građana RH s prebivalištem u Rijeci}\}$;
- $P = \{z \mid z \text{ je broj registracijske tablice vozila na području Primorsko-goranske županije}\}$;
- $Z = \{w \mid w \text{ je algoritam za rješavanje problemskih zadataka}\}$.

U matematici se najčešće koriste skupovi brojeva, stoga ćemo ukratko ponoviti te skupove i njihove standardne oznake:

1. skup prirodnih brojeva: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$,
2. skup cijelih brojeva: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\}$,
3. skup racionalnih brojeva: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$,
4. skup iracionalnih brojeva: $\mathbb{I}$ sastoji se od svih iracionalnih brojeva

   kažemo da je neki broj iracionalan ako on nije racionalan (odnosno; ako se on ne može zapisati u obliku racionalnog broja); navedimo nekoliko iracionalnih brojeva:

   $$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{8}, -\sqrt{10}, \ldots, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{11}}, \ldots,\ \pi \approx 3.14,\ e \approx 2.72, \ldots,$$
5. skup realnih brojeva: $\mathbb{R}$ sastoji se od svih racionalnih i iracionalnih brojeva (vidi operacije sa skupovima),
6. skup kompleksnih brojeva: $\mathbb{C} = \{a + b\,i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

   gdje je $i \in \mathbb{C}$ imaginarna jedinica za koju vrijedi: $i^2 = -1$.

Primjer 3.2

Navedimo nekoliko primjera:

◎ $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x \leq 10\}$ (označava da se skup A sastoji od prirodnih brojeva brojeva $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$);

- $\circledcirc$ $B = \{x \mid x = 3n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (označava da se skup B sastoji od svih cijelih brojeva koji su djeljivi brojem 3);
- $\circledcirc$ $D = \{3k \mid k \leq 33,\ k \in \mathbb{N}\}$ (označava da se skup D sastoji od svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih od broja 99 koji su djeljivih brojem 3);
- $\circledcirc$ $G = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 1 = 0\}$ (označava da se skup G sastoji od samo jednog elementa i to broja 1, jer -1 nije prirodan broj);
- $\circledcirc$ $S = \{3^x + 5 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ (označava da se skup S sastoji od svih racionalnih brojeva koje dobivamo iz izraza $3^x + 5$ za svaki cijeli broj x);
- $\circledcirc$ $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 5\}$ (označava da se skup V sastoji od svih realnih brojeva koji su veći ili jednaki od -3 i (strogo) manji od 5).

Definicija 3.3

Prazan skup je skup koji nema nijednog elementa. Označavamo ga s $\emptyset$ ili $\{\}$.

Napomena:

Treba ralikovati $\emptyset$ od $\{\emptyset\}$.

Primijetimo da $\emptyset$ označava prazan skup (koji nema nijednog elementa), dok $\{\emptyset\}$ označava skup koji se sastoji od jednog elementa $\emptyset$ (praznog skupa) - vidi primjer 3.11.

Primjer 3.4

Primjeri praznih skupova:

$$\{x \mid x \neq x\} = \emptyset; \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \emptyset; \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Napomena:

Navedimo primjere u kojima nije dobro definiran skup.

1. Skup $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$

   nije dobro definiran, jer rješenja $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ jednadžbe $x^2 - 1 = 0$ ovise o izboru skupa brojeva ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$) u kojemu rješavamo zadanu jednadžbu. Uočimo sljedeće:

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{1\}, && \{x \in \mathbb{I} \mid x^2 - 1 = 0\} = \emptyset, \\ &\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}, && \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}, \\ &\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}, && \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

2. Analogno prethodno navedenom, također i skup $\{x \mid x^2+1=0\}$

   nije dobro definiran. Primijetimo da jednadžba $x^2+1=0$ nema rješenje u skupu realnih brojeva, ali zato ima dva konjugirano kompleksna rješenja $x_1=-i$ i $x_2=i$ u skupu kompleksnih brojeva. Time je:

   $$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1=0\} = \emptyset,$$
   $$\{x \in \mathbb{C} \mid x^2+1=0\} = \{i,-i\}, \quad \text{gdje je: } i=\sqrt{-1}.$$

   Dakle, u ovisnosti o izboru skupa realnih ili kompleksnih brojeva dobivaju se dva međusobno različita skupa.

   Naglasimo da se npr. skup $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1=0\}$
   može zapisati i u obliku: $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2-1=0\}$
   ili: $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x^2-1=0\}$.

3. Skup $\{x \mid x \text{ je trokut}\}$

   nije dobro definiran, jer nije navedeno gdje su zadani trokuti.

   Uočimo da trokuti mogu biti zadani u ravnini ili u prostoru.

3.1 Odnosi između skupova

Obzirom na odnos (relaciju) *biti podskup* između dva (ili više) skupa razlikujemo podskupovnost i jednakost skupova, stoga ćemo najprije definirati odnos *biti podskup*.

Podskupovnost skupova

Definicija 3.5

Skup A **je podskup skupa** B i pišemo $A \subseteq B$ ako i samo ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B.

◇ Drugim riječima: $A \subseteq B$ ako i samo ako $(x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)$.

Svaki skup kojemu je A podskup zove se nadskup skupa A.

Dakle, ako je $A \subseteq B$, onda kažemo da je skup A podskup skupa B ili da je skup B nadskup skupa A.

Za svaki skup A vrijedi: $A \subseteq A$ (svaki skup je podskup samog sebe),
$\emptyset \subseteq A$ (prazan skup je podskup svakog skupa).

Definicija 3.6

Skup A **je pravi podskup skupa** B i pišemo $A \subset B$ ako i samo ako je skup A podskup skupa B i ako skup B sadrži barem jedan element koji nije sadržan u skupu A.

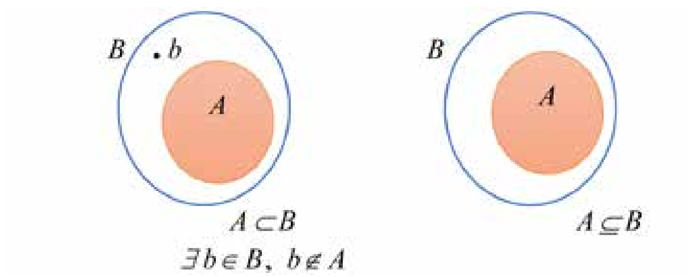
$\diamondsuit$ Drugim riječima: $A \subset B$ ako i samo ako $(A \subseteq B \wedge (\exists x \in B \wedge x \notin A))$.

Uočiti: $A \not\subset A$ (nijedan skup ne može biti pravi podskup samog sebe),
$\emptyset \subset A$ za svaki $A \neq \emptyset$ (prazan skup je pravi podskup svakog nepraznog skupa).

Napomena:

Pod podskupovnošću dvaju skupova A i B podrazumijeva se da je $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A$ ili $A \subset B$ ili $B \subset A$.

Skupove grafički prikazujemo figurama u obliku krugova koje nazivamo **Vennovim dijagramima**.



Slika 1: Vennovi dijagrami: pravi podskup i podskup

Primjer 3.7

Neka je zadan skup $D = \{a, b, c\}$. Tada su
$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$ podskupovi skupa D, a
$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ pravi podskupovi skupa D.

Definicija 3.8

Skupovi A i B su neusporedivi obzirom na odnos biti podskup ako $A \nsubseteq B$ i $B \nsubseteq A$.

Konkretno, skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4\}$ su neusporedivi obzirom na odnos biti podskup, jer $A \nsubseteq B$, ali i $B \nsubseteq A$.

Zadatak 3.9

1. Dokažite da za skupove B, C i D iz primjera 3.2 vrijedi: $D \subset B$, $C \subset B$.

2. Dokažite:

   (a) $A \subset B \Rightarrow A \subseteq B$

   (b) $A \subseteq B \not\Rightarrow A \subset B$

   (c) $A \nsubseteq B \Rightarrow A \not\subset B$.

3. Dokažite: ako su A i B neusporedivi skupovi obzirom na odnos biti podskup, onda je $A \neq B$.

Jednakost skupova

Definicija 3.10

Skup A **jednak je skupu** B i pišemo $A = B$ ako i samo ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B i obratno ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A.

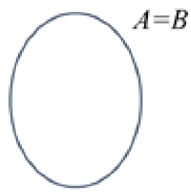
◇ Drugim riječima: $A = B$ ako i samo ako $(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A)$.

Konkretno, vrijede jednakosti sljedećih skupova:

$\{c, a, b\} = \{a, b, c\}$ (poredak elemenata u skupu nije bitan);

$\{1, 3, 2, 1, 2, 1\} = \{1, 2, 3\}$ (ponavljanje istog elementa u skupu je nepotrebno).

Jednakost dvaju skupova može se prikazati sljedećim Vennovim dijagramom.



Slika 2: Vennov dijagram skupa

Primjenom definicija 3.6 i 3.10 direktno proizlazi: ako je $A \subset B$, onda je $A \neq B$.

Napomena:

Ako je skup A podskup skupa B, onda skup B može, ali ne mora biti podskup skupa A. Međutim, ako je skup A pravi podskup skupa B, onda skup B ne može biti pravi podskup skupa A.

Primjer 3.11

Dokažimo: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Rješenje:

Primjenom definicije 3.5 proizlazi da je $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ i $\{\emptyset\} \nsubseteq \emptyset$, stoga koristeći definiciju 3.10 slijedi $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Primjer 3.12

Za skupove brojeva vrijedi: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Neka su a i b bilo koja dva realna broja takva da je $a \leq b$. Tada u skupu $\mathbb{R}$ (realnih brojeva) razlikujemo sljedeće intervale (podskupove skupa $\mathbb{R}$):

◇ otvoren interval: $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,

◇ segment ili zatvoren interval: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$,

◇ poluotvoreni (ili poluzatvoreni) interval: $\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ili $[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.

Pritom brojeve a i b zovemo granicama (odgovarajućih) intervala.
Nadalje, ako je jedna granica intervala jednaka plus ili minus beskonačnosti, onda imamo sljedeće intervale u skupu $\mathbb{R}$ (koji su također njegovi podskupovi):

◇ $\langle -\infty, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $\langle -\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$,

◇ $\langle a, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$, $[a, +\infty\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, $\langle -\infty, +\infty\rangle = \mathbb{R}$.

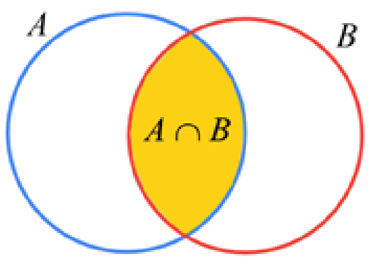
3.2 Operacije sa skupovima

Osnovne operacije sa skupovima su presjek, unija i razlika skupova.

Definicija 3.13

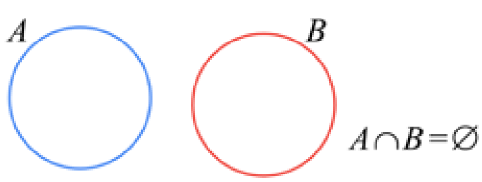
Presjek skupova A **i** B (oznaka: $A \cap B$) je skup koji čine svi elementi koji su i u skupu A i u skupu B i pišemo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



Slika 3: Vennov dijagram presjeka dvaju skupova

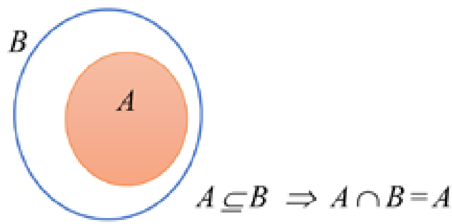
Za skupove A i B kažemo da su **disjunktni skupovi** ako i samo ako nemaju zajedničkih elementa, odnosno ako je $A \cap B = \emptyset$.



Slika 4: Vennov dijagram presjeka dvaju disjunktnih skupova

Uočimo: $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

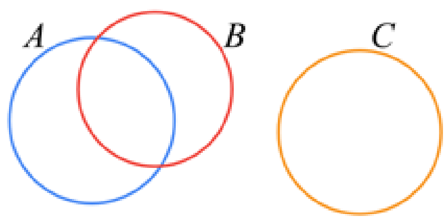
Ako je $A \subseteq B$, onda je $A \cap B = A$.



Slika 5: Vennov dijagram od $A \cap B$ ako je $A \subseteq B$

Primjer 3.14

Neka su skupovi A, B i C zadani sljedećim Vennovim dijagramom:



Tada su sva tri skupa neusporediva obzirom na odnos biti podskup, jer $A \nsubseteq B$ i $B \nsubseteq A$, $A \nsubseteq C$ i $C \nsubseteq A$, $B \nsubseteq C$ i $C \nsubseteq B$.
S druge strane, skupovi A i C i skupovi B i C su disjunktni, jer je $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap C = \emptyset$.

Primjer 3.15

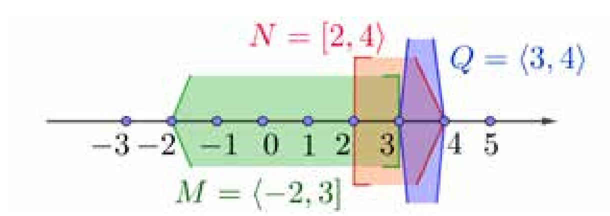
1. Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 3, 5\}$ i $C = \{-1, 0, 5\}$.

   Tada je $A \cap B = \{3\}$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \{0, 5\}$. A i C su disjunktni skupovi.

2. Neka su zadani skupovi $M = \langle -2, 3]$, $N = [2, 4\rangle$ i $Q = \langle 3, 4\rangle$.

   Tada je $M \cap N = [2, 3]$, $M \cap Q = \emptyset$, $N \cap Q = \langle 3, 4\rangle$. M i Q su disjunktni skupovi.

   Napomenimo da se intervali (podskupovi skupa realnih brojeva) ne mogu grafički prikazati Vennovim dijagramom, već se oni prikazuju na brojevnom pravcu. Konkretno, obzirom na zadane skupove M, N i Q imamo sljedeći grafički prikaz:

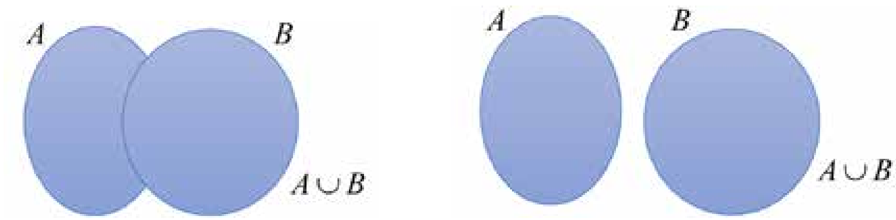


Slika 6: Grafički prikaz intervala na brojevnom pravcu

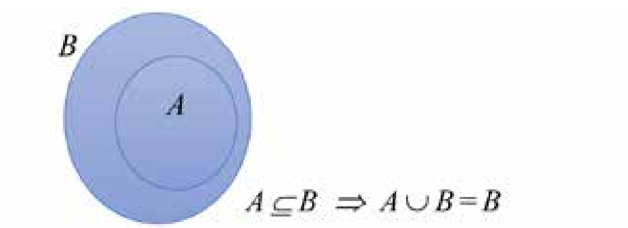
Definicija 3.16

Unija skupova A **i** B (oznaka: $A \cup B$) je skup koji čine svi elementi koji su u skupu A ili u skupu B i pišemo:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$



Slika 7: Vennov dijagram unije dvaju skupova



Slika 8: Vennov dijagram od $A \cup B$ ako je $A \subseteq B$

Uočimo: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

Primjer 3.17

Odredimo uniju skupova zadanih u primjeru 3.15.

1. Ako je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 3, 5\}$ i $C = \{-1, 0, 5\}$, onda je:
   $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $A \cup C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, $B \cup C = \{-1, 0, 3, 5\}$.
2. Ako je $M = \langle -2, 3]$, $N = [2, 4\rangle$ i $Q = \langle 3, 4\rangle$, onda je:
   $M \cup N = \langle -2, 4\rangle$, $M \cup Q = \langle -2, 4\rangle$, $N \cap Q = [2, 4\rangle$ (vidi sliku 6).

Definicija 3.18

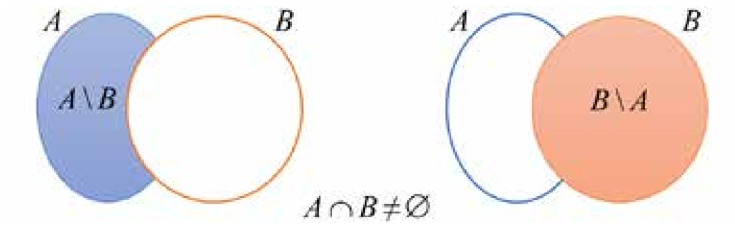
Razlika skupova A **i** B (oznaka: $A \backslash B$) je skup koji čine svi elementi koji su u skupu A, a nisu u skupu B i pišemo:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

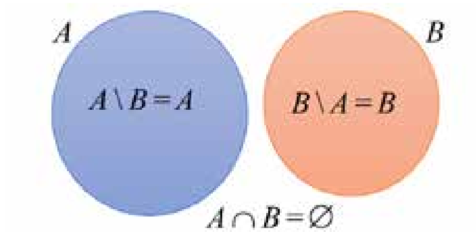
Uočimo: $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ i analogno $\mathbb{R} \backslash \mathbb{I} = \mathbb{Q}$.

Primjer 3.19

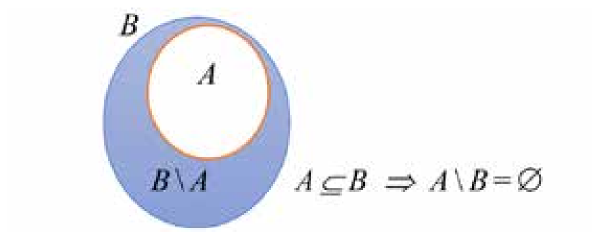
Odredimo razlike skupova zadanih u primjeru 3.15.



Slika 9: Vennov dijagram razlike dvaju skupova



Slika 10: Vennov dijagram razlike dvaju disjunktnih skupova



Slika 11: Vennov dijagram od $A\backslash B$ i $B\backslash A$ ako je $A \subseteq B$

1. Ako je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 3, 5\}$ i $C = \{-1, 0, 5\}$, onda je:

   $A\backslash B = \{1, 2\}$, $A\backslash C = \{1, 2, 3\}$, $B\backslash C = \{3\}$,

   $B\backslash A = \{0, 5\}$, $C\backslash A = \{-1, 0, 5\}$, $C\backslash B = \{-1\}$.

2. Ako je $M = \langle -2, 3]$, $N = [2, 4\rangle$ i $Q = \langle 3, 4\rangle$, onda je:

   $M\backslash N = \langle -2, 2\rangle$, $M\backslash Q = M$ $(M \cap Q = \emptyset)$, $N\backslash Q = [2, 3]$,

   $N\backslash M = \langle 3, 4\rangle$, $Q\backslash M = Q$ $(M \cap Q = \emptyset)$, $Q\backslash N = \emptyset$ (vidi sliku 6).

Definicija 3.20

Neka je S neki neprazan skup i neka je A neki skup takav da je $A \subseteq S$.
Komplement skupa A **u odnosu na skup** S (oznaka: $C_S(A)$ ili A_S^C) čine svi elementi koji su u skupu S, a nisu u skupu A i pišemo:

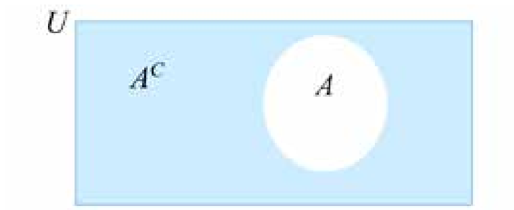
$$C_S(A) = S\backslash A.$$

Primjenom definicije 3.18 proizlazi: $C_S(A) = \{x \mid x \in S \wedge x \notin A\}$, gdje je $A \subseteq S$.

Navedimo da se često promatra komplement skupa u odnosu na neki sveobuhvatan skup koji se naziva **univerzalni skup (univerzum)** i označava s U. Pritom se komplement skupa A (u odnosu na univerzalni skup U) označava s $C(A)$ ili kraće A^C te je:

$$A^C = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \backslash A,$$

gdje se podrazumijeva da skup U sadrži skup A, odnosno da je $A \subseteq U$.
Univerzalni skup se Vennovim dijagramom predočuje pravokutnikom.



Slika 12: Vennov dijagram komplementa skupa A u odnosu na univerzalni skup U

Za vježbu dokažite da vrijede sve tvrdnje sljedećeg teorema. Tvrdnje se dokazuju analogno kao u primjeru 3.22.

Teorem 3.21

Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Tada vrijedi:

$$A \cap \emptyset = A, \quad A \cup \emptyset = A,$$

$A \cap A = A$	*zakon idempotentnosti za presjek,*
$A \cup A = A$	*zakon idempotentnosti za uniju,*
$A \cap B = B \cap A$	*komutativnost presjeka,*
$A \cap B = B \cup A$	*komutativnost unije,*
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	*asocijativnost presjeka,*
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	*asocijativnost unije,*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	*distributivnost presjeka prema uniji,*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	*distributivnost unije prema presjeku.*

Primjer 3.22

Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Dokažimo da vrijedi svojstvo distributivnosti unije prema presjeku:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} A\cup(B\cap C) &= \{x \mid x\in A \vee x\in (B\cap C)\}\\ &= \{x \mid x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C)\}\\ &\overset{(\bullet)}{=} \{x \mid (x\in A \vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)\}\\ &= \{x \mid x\in(A\cup B)\wedge x\in(A\cup C)\}\\ &= \{x \mid x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\}\\ &= (A\cup B)\cap(A\cup C)\end{aligned}$$

$^{(\bullet)}$ primjena svojstva distributivnosti disjunkcije prema konjukciji, vidi teorem 2.21.

Za vježbu dokažite da vrijede sve tvrdnje sljedećeg teorema. Tvrdnje se dokazuju analogno kao u primjeru 3.24.

Teorem 3.23

Neka su A i B proizvoljni skupovi koji su sadržani u nekom univerzalnom skupu U. Tada vrijedi:

$$A\cap U = A$$

$$A\cup U = U$$

$$A\cap A^C = \emptyset$$

$$A\cup A^C = U$$

$$(A^C)^C = A$$

$$(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$$

$$(A\cup B)^C = A^C\cap B^C$$

$$A\backslash B = A\cap B^C \subseteq B^C$$

$$B\backslash A^C = B\cap A$$

$$A^C\backslash B^C = B\backslash A$$

Primjer 3.24

Neka su A i B proizvoljni skupovi koji su sadržani u nekom univerzalnom skupu U. Dokažimo da vrijedi

(a) $(A\cap B)^C = A^C\cup B^C$

(b) $A^C\backslash B^C = B\backslash A$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}(A\cap B)^C &= \{x\in U \mid x\notin (A\cap B)\}\\ &= \{x\in U \mid \neg(x\in(A\cap B))\}\\ &= \{x\in U \mid \neg(x\in A\wedge x\in B)\}\\ &\overset{(*)}{=} \{x\in U \mid (\neg(x\in A))\vee(\neg(x\in B))\}\\ &= \{x\in U \mid x\notin A\vee x\notin B\}\\ &= A^C\cup B^C\end{aligned}$$

$^{(*)}$ primjena De Morganovog zakona, vidi teorem 2.20.

(b)

$$\begin{aligned}A^C\backslash B^C &= \{x\in U \mid x\in A^C\wedge x\notin B^C\}\\ &= \{x\in U \mid x\notin A\wedge(\neg(x\in B^C))\}\\ &= \{x\in U \mid x\notin A\wedge(\neg(x\notin B))\}\\ &\overset{(**)}{=} \{x\in U \mid x\notin A\wedge(\neg(\neg(x\in B)))\}\\ &= \{x\in U \mid x\notin A\wedge x\in B\}\\ &= \{x\in U \mid x\in B\wedge x\notin A\}\\ &= B\backslash A\end{aligned}$$

$^{(**)}$ primjena zakona dvojne negacije, vidi teorem 2.20.

Definicija 3.25

Neka je S proizvoljan skup. Skup svih podskupova skupa S (oznaka: $\mathcal{P}(S)$) zovemo **partitivnim skupom skupa** S i pišemo:

$$\mathcal{P}(S)=\{A \mid A\subseteq S\}.$$

Konkretno, neka je zadan skup $A=\{1,2,3\}$. Tada je partitivni skup skupa A sljedeći skup: $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

Podsjetimo se da je: $\emptyset\subseteq S$ za svaki skup S kao i $\emptyset\subseteq\emptyset$.
Uočimo: $\mathcal{P}(\emptyset)=\{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

Definicija 3.26

Neka je $S\neq\emptyset$ proizvoljan neprazan skup. **Particija skupa** S (oznaka: $\mathcal{F}(S)$) je skup međusobno disjunktnih nepraznih podskupova skupa S koji u uniji daju cijeli skup S.

Drugim riječima, particija skupa S je skup: $\mathcal{F}(S)=\{S_i \mid i\in I\}$ sa svojstvima:

(a) $(\forall\, i\in I)\ (S_i\subseteq S\ \wedge\ S_i\neq\emptyset)$,

(b) $(\forall\, i,j\in I)\ (i\neq j\ \Rightarrow\ S_i\cap S_j=\emptyset)$,

(c) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} S_i=S.$

Uočimo da za particiju $\mathcal{F}(S)$ skupa S uz gore navedena tri svojstva vrijedi:

$$\mathcal{F}(S) \subseteq \mathcal{P}(S),$$

gdje je $\mathcal{P}(S)$ partitivni skup skupa S.

Primjer 3.27

Neka je zadan skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Tada skup

$\mathcal{F}_1 = \{\{1, 3\}, \{2, 5, 6\}, \{4, 7\}\}$ je particija skupa S;

$\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$ nije particije skupa S.

3.3 Kartezijev (direktni) produkt skupova

Definicija 3.28

Kartezijev produkt dva (neprazna) skupa A i B (oznaka: $A \times B$) je skup svih uređenih parova (a, b) kojima je prva komponenta iz skupa A, a druga iz skupa B i pišemo:

$$A \times B = \{(a, b) |\, a \in A \,\wedge\, b \in B\}.$$

Pritom kažemo da je

A prvi faktor, odnosno prva projekcija kartezijevog produkta $A \times B$,

B drugi faktor, odnosno druga projekcija kartezijevog produkta $A \times B$,

a prva komponenta (koordinata) uređenog para (a, b),

b druga komponenta (koordinata) uređenog para (a, b).

Definicija 3.29

Za dva uređena para (a, b) i (c, d) kažemo da su jednaka i pišemo:

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{ako i samo ako je} \quad a = c \text{ i } b = d.$$

Napomena:

Podsjetimo se da poredak elemenata u skupu nije bitan, stoga je: $\{a, b\} = \{b, a\}$. Međutim, to ne vrijedi i za uređene parove, gdje je poredak elemenata bitan. Dakle,

$$(a, b) \neq (b, a).$$

Time je: $A \times B \neq B \times A$.

Treba razlikovati zapis uređenih parova od zapisa skupova. Uočimo: $(a, b) \neq \{a, b\}$.

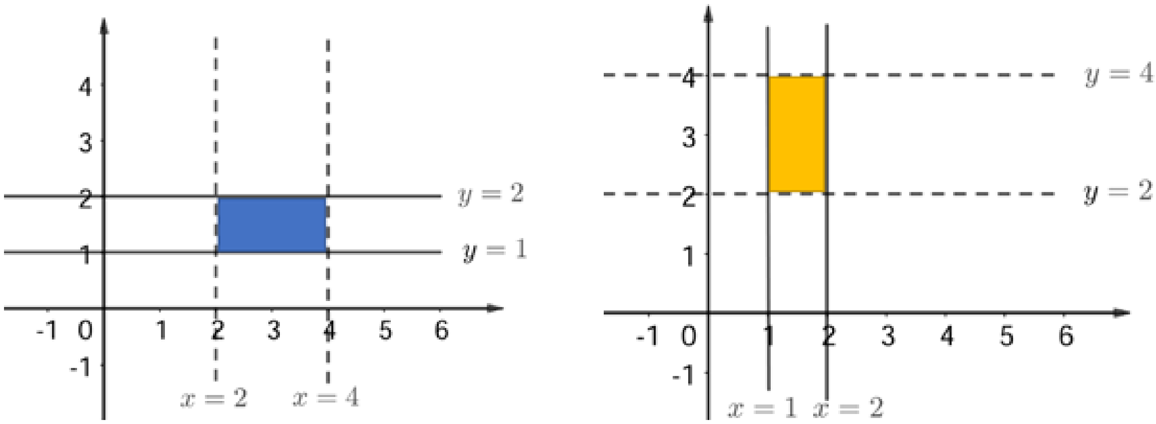
Primjer 3.30

Neka su zadani skupovi $A = \{2, 3, 4\}$ i $B = \{5, 6\}$. Tada je:

$$A \times B = \{2, 3, 4\} \times \{5, 6\} = \{(2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\},$$
$$B \times A = \{5, 6\} \times \{2, 3, 4\} = \{(5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}.$$

Primjer 3.31

Neka su zadani skupovi $A = \langle 2, 4\rangle$ i $B = [1, 2]$ (podskupovi skupa realnih brojeva). Prikažimo grafički kartezijeve produkte $A \times B$ i $B \times A$ obzirom na zadane skupove A i B.



Slika 13: Kartezijev produkt $\langle 2,4\rangle \times [1,2]$ i kartezijev produkt $[1,2] \times \langle 2,4\rangle$

Uočimo da $\qquad [2,4] \times [1,2] \neq [1,2] \times [2,4]$.

Analogno definiciji 3.28 definira se kartezijev produkt tri neprazna skupa.

Definicija 3.32

Kartezijev produkt tri (neprazna) skupa A, B i C (oznaka: $A \times B \times C$) je skup svih uređenih trojki (a,b,c) kojima je prva komponenta iz skupa A, druga iz skupa B, a treća iz skupa C i pišemo:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) |\, a \in A \,\wedge\, b \in B \,\wedge\, c \in C\}.$$

Primjer 3.33

Neka su zadani skupovi $A = \{2,3,4\}$, $B = \{5,6\}$ i $C = \{1,2\}$. Tada je:

$$\begin{aligned} A \times B \times C =& \{2,3,4\} \times \{5,6\} \times \{1,2\} \\ =& \{(2,5,1),(2,5,2),(2,6,1),(2,6,2),(3,5,1),(3,5,2),(3,6,1),(3,6,2), \\ & (4,5,1),(4,5,2),(4,6,1),(4,6,2)\}. \end{aligned}$$

Sada ćemo definirati kartezijev produkt n nepraznih skupova, gdje je n bilo koji prirodan broj.

Definicija 3.34

Kartezijev produkt n **(nepraznih) skupova** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (oznaka: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ za $n \in \mathbb{N}$) je skup svih uređenih n-torki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ takvih da je $a_i \in A_i$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i pišemo:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1,\, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, a_i je i-ta koordinata uređene n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definicija 3.35

Ako je $A = A_1 = A_2 = \cdots = A_n$ (gdje je $A_i \neq \emptyset$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$),
onda produkt

$$A \times A \times \cdots \times A \quad (= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$$

označavamo s A^n i zovemo n**-tom potencijom skupa** A.

Dakle,

$$\begin{array}{ll} A^1 = A & \text{je prva potencija skupa } A\text{, tj. skup } A, \\ A^2 = A \times A & \text{je druga potencija skupa } A \text{ ili kartezijev kvadrat,} \\ A^3 = A \times A \times A & \text{je treća potencija skupa } A \text{ ili kartezijev kub,} \\ \quad\vdots & \\ A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} & \text{je } n\text{-ta potencija skupa } A. \end{array}$$

Primjer 3.36

Neka je zadan skup $A = \{0, 1\}$. Odredimo: A^2 i A^3.

Rješenje:

$$\begin{aligned} A^2 &= \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}, \\ A^3 &= \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \\ &= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}. \end{aligned}$$

Napomena:

Ako je barem jedan skup $A_i = \emptyset$, onda je i $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \emptyset$.

Ako pretpostavimo da je skup A_i prazan skup, onda ne postoji i-ta koordinata uređene n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, stoga ne postoji ni uređena n-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sa zadanim svojstvima. Time je kartezijev produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ jednak praznom skupu.

4 Relacije

Relacijama prikazujemo određene odnose između matematičkih objekata.

Definicija 4.1

Relacija je bilo koji podskup kartezijevog produkta n (nepraznih) skupova $A_1, A_2, \dots, A_n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj.

Relaciju $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ nazivamo $n-$**arnom relacijom na** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Specijalno, ako je

$n = 1$, onda relaciju $R \subseteq A_1$ nazivamo **unarnom relacijom na** A_1;

$n = 2$, onda relaciju $R \subseteq A_1 \times A_2$ nazivamo **binarnom relacijom na** $A_1 \times A_2$;

$n = 3$, onda relaciju $R \subseteq A_1 \times A_2 \times A_3$ nazivamo **ternarnom relacijom na** $A_1 \times A_2 \times A_3$ i analogno ako je $n = k$ onda relaciju $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ nazivamo $k-$**narnom relacijom na** $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$.

Napomena:

Primjenom definicije 3.34 proizlazi da su elementi relacije $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ zapravo one uređene n-torke $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ iz kartezijevog produkta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ koje zadovoljavaju "*uvjet*" relacije R.
Pritom se pod "*uvjetom*" relacije R misli na način kako je relacija R na kartezijevom produktu $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, $n \in \mathbb{N}$ definirana.
U sljedećem primjeru definirat ćemo jednu ternarnu relaciju na kartezijevom produktu $A \times B \times C$ i jednu binarnu relaciju na kartezijevom produktu $A \times B$ za neke konkretne skupove A, B i C.

Primjer 4.2

Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 5, 8\}$ i $C = \{a, b\}$.

1. Napišimo ternarnu relaciju R_1 na $A \times B \times C$ definiranu s:

druga koordinata (komponenta) uređene trojke $(a, b, c) \in A \times B \times C$ *jednaka je* 8.

Rješenje:

Primijetimo da je na kartezijevom produktu

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(1,3,a),(1,3,b),(1,5,a),(1,5,b),(1,8,a),(1,8,b),(2,3,a),(2,3,b),(2,5,a),\\ &(2,5,b),(2,8,a),(2,8,b),(4,3,a),(4,3,b),(4,5,a),(4,5,b),(4,8,a),(4,8,b)\} \end{aligned}$$

definirana relacija $R_1 \subseteq A \times B \times C$ koja se sastoji od svih onih uređenih trojki (elemenata) kartezijevog produkta $A \times B \times C$ za koje vrijedi da im je druga koordinata (komponenta) jednaka 8. Budući da je $8 \in B$, zaključujemo da je relacija $R_1 \subseteq A \times B \times C$ dobro definirana, stoga možemo pisati:

$$R_1 = \{(a, b, c) \in A \times B \times C \mid b = 8\}$$

i dobivamo da je:

$$R_1 = \{(1,8,a),(1,8,b),(2,8,a),(2,8,b),(4,8,a),(4,8,b)\}.$$

- Primijetimo da ternarna relacija R_2 na $A \times B \times C$ zadana s:

  druga koordinata (komponenta) uređene trojke $(a, b, c) \in A \times B \times C$ *jednaka je* 2

  nije dobro definirana, jer $2 \notin B$, stoga $R_2 \nsubseteq A \times B \times C$.

2. Neka je binarna relacija R na $A \times B$ definirana na sljedeći način:

   zbroj koordinata uređenog para $(a, b) \in A \times B$ *jednak je* 7,

   gdje je $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 5, 8\}$.

Rješenje:

U kartezijevom produktu:

$$A \times B = \{(1,3),(1,5),(1,8),(2,3),(2,5),(2,8),(4,3),(4,5),(4,8)\}$$

tražimo one uređene parove $(a, b) \in A \times B$ za koje vrijedi da je $a + b = 7$.
Pritom će takvi parovi sačinjavati relaciju $R \subseteq A \times B$ koju možemo pisati u obliku:

$$R = \{(a, b) \in A \times B \mid a + b = 7\}$$

i dobivamo da je: $R = \{(2, 5), (4, 3)\}$.

Drugim riječima, relacija R se sastoji od svih onih uređenih parova iz kartezijevog produkta $A \times B$ za koje vrijedi da im je zbroj koordinata jednak 7, gdje je $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{3, 5, 8\}$.

Definicija 4.3

Neka je $R \subseteq A \times B$ (binarna) relacija na kartezijevom produktu

$$A \times B = \{(a, b) | \, a \in A \, \wedge \, b \in B\}.$$

Kažemo da je $x \in A$ **u relaciji** R **s** $y \in B$ i pišemo $x \, R \, y$ ako je $(x, y) \in R$.

Napomena:

Iz definicije podskupa proizlazi sljedeće:

ako je $R \subseteq A \times B$, onda za svaki $(x, y) \in R$ vrijedi da je i $(x, y) \in A \times B$.

Međutim, obrat ne vrijedi: za svaki $(x, y) \in A \times B$ ne mora vrijediti da je $(x, y) \in R$ - vidi definiciju 3.5.

S druge strane, ako je relacija R podskup kartezijevog produkta $A \times B$, onda relacija R može biti ili pravi podskup kartezijevog produkta $A \times B$ ili može biti jednaka kartezijevom produktu $A \times B$, što zapisujemo u obliku:

ako je $R \subseteq A \times B$, onda je $R \subset A \times B$ ili $R = A \times B$.

Primjer 4.4

1. Neka su zadani skupovi $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Odredimo relaciju R na kartezijevom produktu $A \times B$ definiranu s:

$$R = \{(x, y) \in A \times B \mid x \text{ je djeljiv s } y\}.$$

Rješenje:

$$R = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (8, 1), (8, 2)\}.$$

Uočimo: $R \subset A \times B$.

2. Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 5\}$.

Odredimo relaciju R na $A \times B$ definiranu s:

$$x\,R\,y \quad \text{ako je } x \text{ manji ili jednak od } y.$$

Rješenje:

Relaciju R sačinjavat će oni uređeni parovi (x, y) za koje vrijedi da je $x \in A$ manji ili jednak od $y \in B$, stoga je:

$$R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}.$$

Uočimo da je u ovom slučaju $R = A \times B$.

Općenito je relacija pravi podskup ("$\subset$") kartezijevog produkta na kojem je ona definirana, ali ju zapisujemo kao podskup ("$\subseteq$") kartezijevog produkta, jer postoji ("barem jedna") relacija koja je jednaka kartezijevom produktu na kojem je ona definirana.

Definicija 4.5

Inverzna relacija relacije $R \subseteq A \times B$ (ili **obrat relacije** R) je relacija na $B \times A$ u oznaci R^{-1} takva da je:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \subseteq B \times A.$$

◇ Drugim riječima: ako je $x\,R\,y$, onda je $y\,R^{-1}\,x$.

Primjer 4.6

Odredimo inverzne relacije relacija definiranih u primjeru 4.4.

1. Za skupove $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ i relaciju

$$R = \{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (7, 1), (8, 1), (8, 2)\} \subseteq A \times B$$

inverzna relacija relaciji R je:

$$R^{-1} = \{(1, 4), (2, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 8)\} \subseteq B \times A.$$

2. Za skupove $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 5\}$ i relaciju

$$R = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\} = A \times B$$

inverzna relacija relaciji R je:

$$R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2), (3, 3), (5, 3)\} = B \times A.$$

Definicija 4.7

Kompozicija relacija R i S u oznaci $S \circ R$ definira se na sljedeći način.

Neka su A, B, C proizvoljni (neprazni) skupovi i neka su R i S (binarne) relacije takve da je

$$R \subseteq A \times B, \quad S \subseteq B \times C.$$

Tada je kompozicija relacija $S \circ R \subseteq A \times C$ (binarna relacija na $A \times C$) definirana s:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid (\exists\, b \in B) \text{ tako da je } a\, R\, b \,\wedge\, b\, S\, c\}.$$

Primjer 4.8

Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ i $C = \{7, 8, 9\}$ i relacije:

$$R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\} \subseteq A \times B,$$
$$S = \{(4, 8), (5, 8), (6, 8), (6, 9)\} \subseteq B \times C.$$

Tada je kompozicija relacija

$$S \circ R = \{(1, 8), (2, 8), (3, 8), (3, 9)\}$$

binarna relacija na $A \times C$, odnosno: $S \circ R \subseteq A \times C$.

Napomena:

Ako je $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$, onda je $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Općenito: $R \circ S \neq S \circ R$.

U nastavku ćemo promatrati binarne relacije na nekom (nepraznom) skupu A.

Ponovimo, binarna relacija je bilo koji podskup kartezijevog produkta dva (neprazna) skupa, koji mogu biti različiti ili jednaki.

Neka su A i B neprazni (različiti) skupovi i neka je $R \subseteq A \times B$ binarna relacija na $A \times B$. Tada za svaki element $(x, y) \in R$ kažemo da je element $x \in A$ u relaciji R s elementom $y \in B$, gdje je $A \neq B$.

Specijalno, ako je $A = B$, onda je $R \subseteq A^2$ (gdje je $A^2 = A \times A$) i kažemo da je R **binarna relacija na skupu** A.

Za svaki element $(x, y) \in R \subseteq A^2$ kažemo da je element $x \in A$ u relaciji R s elementom $y \in A$.

Dakle, $(x, y) \in R$ podrazumijeva da je $x\, R\, y$.

4.1 Binarne relacije na skupu

U ovom odjeljku promatrati ćemo binarne relacije na nekom (nepraznom) skupu A, odnosno relacije $R \subseteq A^2$.

Navedimo najprije nekoliko primjera relacija $R \subseteq A^2$ definiranih na (nepraznom) skupu A.

Primjer 4.9

Neka je zadan skup $A = \{1, 2, 3\}$. Tada je:

$$A^2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\},$$

gdje je: $A^2 = A \times A$.

Promatrajmo u skupu A^2 sve (elemente) uređene parove za koje vrijedi da je prva koordinata uređenog para strogo manja od njegove druge koordinate. Tada takvi elementi (uređeni parovi) iz skupa A^2 sačinjavaju sljedeći skup

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$$

koji je podskup skupa A^2. Uočimo da je skup $R_1 \subseteq A^2$ ujedno jedna relacija na skupu A koja je za svaki $x, y \in A$ zadana s:

$$\boxed{x\, R_1\, y \quad \text{ako i samo ako je} \quad x < y.}$$

Relaciju R_1 nazivamo *"biti manji" u skupu A* i pišemo $R_1 \equiv <$.

Analogno, za svaki $x, y \in A$ relaciju

- ◇ $R_2 \subseteq A^2$ zadanu s: $\boxed{x\, R_2\, y \quad \text{ako i samo ako je} \quad x > y}$

  nazivamo *"biti veći" u skupu A* i pišemo $R_2 \equiv >$;

- ◇ $R_3 \subseteq A^2$ zadanu s: $\boxed{x\, R_3\, y \quad \text{ako i samo ako je} \quad x = y}$

  nazivamo *"biti jednak" u skupu A* i pišemo $R_3 \equiv =$;

- ◇ $R_4 \subseteq A^2$ zadanu s: $\boxed{x\, R_4\, y \quad \text{ako i samo ako je} \quad x \leq y}$

  nazivamo *"biti manji ili jednak" u skupu A* i pišemo $R_4 \equiv \leq$;

- ◇ $R_5 \subseteq A^2$ zadanu s: $\boxed{x\, R_5\, y \quad \text{ako i samo ako je} \quad x \geq y}$

  nazivamo *"biti veći ili jednak" u skupu A* i pišemo $R_5 \equiv \geq$.

Pritom je:

$$R_2 = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}, \qquad R_4 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\},$$

$$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, \qquad R_5 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}.$$

Definicija 4.10

Za binarnu relaciju $R \subseteq A^2$ na skupu A kažemo da je

- **refleksivna** ako i samo ako za svaki $a \in A$ vrijedi: $a\,R\,a$
- **simetrična** ako i samo ako za svaki $a, b \in A$ vrijedi:
  ako je $a\,R\,b$, onda je i $b\,R\,a$
- **antisimetrična** ako i samo ako za svaki $a, b \in A$ vrijedi:
  ako je $(a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,a)$, onda je $a = b$
- **tranzitivna** ako i samo ako za svaki $a, b, c \in A$ vrijedi:
  ako je $(a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c)$, onda je i $a\,R\,c$

4.1.1 Relacije ekvivalencije

Definicija 4.11

Binarna relacija $R \subseteq A^2$ na skupu A koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna naziva se **relacija ekvivalencije** na skupu A.

Primjer 4.12

Primjeri relacija ekvivalencije:

1. relacija $\sim$ ("*biti sličan*") na skupu trokuta ravnine;
2. relacija $||$ ("*biti paralelan*") na skupu pravaca ravnine;
3. relacija $\equiv_n$ ("*biti kongruentan modulo* n", $n \in \mathbb{N}$) na skupu $\mathbb{Z}$.

   Kažemo da je a kongruentan b modulo n i pišemo: $a \equiv b \pmod{n}$ ili: $a \equiv_n b$
   ako i samo ako je $\dfrac{a-b}{n}$ cijeli broj.

   Navedimo da se $\dfrac{a-b}{n}$ često piše i u obliku $n \,|\, (a-b)$ i čita: "n dijeli $(a-b)$".

   Konkretno, 11 je kongruentan 5 modulo 3 i pišemo $11 \equiv_3 5$,
   jer je $\dfrac{11-5}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ cijeli broj.

Primjer 4.13

Neka je zadan skup $A = \{a, b, c\}$ i $R \subseteq A^2$ binarna relacija na skupu A takva da je

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}.$$

Tada je R relacija ekvivalencije na skupu A, jer je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna na skupu A.

Definicija 4.14

Ako je $R \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije na skupu A i $a \in A$, onda se skup

$$[a]_R = \{x \in A \mid x\, R\, a\}$$

naziva **klasom ekvivalencije relacije** R **određenom elementom** $a \in A$
(ili klasom elemenata ekvivalentnih s $a \in A$ obzirom na relaciju R).

Primjer 4.15

Napišimo sve klase ekvivalencija relacije $R \subseteq A^2$ iz primjera 4.13.
Primijetimo da je $R \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije na skupu A koji se sastoji od tri elementa a, b i c. Time razlikujemo tri klase ekvivalencija relacije $R \subseteq A^2$

1. $[a]_R = \{a, b\}$ (klasa ekvivalencije relacije R određena elementom $a \in A$),
2. $[b]_R = \{a, b\}$ (klasa ekvivalencije relacije R određena elementom $b \in A$),
3. $[c]_R = \{c\}$ (klasa ekvivalencije relacije R određena elementom $c \in A$).

Pritom je: $[a]_R = [b]_R$.

Definicija 4.16

Ako je $R \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije na skupu A, onda se skup

$$A/_R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

naziva **kvocijentnim skupom skupa** A **modulo** R.

♢ Drugim riječima, kvocijentni skup (faktor skup) skupa A modulo R je skup svih klasa ekvivalencija relacije R određenih elementima $x \in A$.

Primjer 4.17

Skup $$A/_R = \{\{a, b\}, \{c\}\}$$

je kvocijentni skup skupa $A = \{a, b, c\}$ modulo R, gdje je $R \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije na skupu A definirana u primjeru 4.13.

Usporedite elemente skupa $A/_R$ s klasama ekvivalencije relacije R određenih pojedinim elementima skupa A (vidi primjer 4.15).

Primjer 4.18

Neka je $A = \{a, b, c, d\}$ i neka su $R_i \subseteq A^2$, $i = 1, 2, 3$ relacije ekvivalencija na skupu A

$R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$;

$R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (c, d), (d, c)\}$;

$R_3 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$.

Odredimo kvocijentni skup skupa A modulo R_i za svaki $i = 1, 2, 3$.

Rješenje:

Primjenom definicije 4.14 dobivamo sljedeće klase ekvivalencija relacija $R_i \subseteq A^2$ određenih elementima skupa A za svaki $i = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{llll} [a]_{R_1} = \{a\}, & [b]_{R_1} = \{b\}, & [c]_{R_1} = \{c\}, & [d]_{R_1} = \{d\}; \\ [a]_{R_2} = \{a\}, & [b]_{R_2} = \{b\}, & [c]_{R_2} = \{c, d\}, & [d]_{R_2} = \{c, d\}; \\ [a]_{R_3} = \{a\}, & [b]_{R_3} = \{b, c, d\}, & [c]_{R_3} = \{b, c, d\}, & [d]_{R_3} = \{b, c, d\}. \end{array}$$

Pritom je:

$$[c]_{R_2} = [d]_{R_2} = \{c, d\}, \qquad [b]_{R_3} = [c]_{R_3} = [d]_{R_3} = \{b, c, d\},$$

stoga primjenom definicije 4.16 proizlaze slijedeći kvocijentni skupovi skupa A modulo R_i za svaki $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} A/_{R_1} &= \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}; \\ A/_{R_2} &= \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}; \\ A/_{R_3} &= \{\{a\}, \{b, c, d\}\}. \end{aligned}$$

Skupovi $A/_{R_1}$, $A/_{R_2}$ i $A/_{R_3}$ su ujedno particije skupa $A = \{a, b, c, d\}$.

Uočite da vrijedi:

> svaki kvocijentni skup skupa A modulo R jednak je odgovarajućoj particiji skupa A i obratno, svaka particija skupa A jednaka je odgovarajućem kvocijentnom skupu skupa A modulo R. Pritom je $R \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije na skupu A.

Teorem 4.19

Svaka relacija ekvivalencije na skupu A određuje particiju skupa A i obratno, svaka particija skupa A određuje relaciju ekvivalencije na skupu A.

Primjer 4.20

Neka je zadan skup $A = \{a, b, c\}$. Tada u suglasnosti s definicijom 3.26 imamo ukupno pet particija skupa A:

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_1(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \\ &\mathcal{F}_2(A) = \{\{a\}, \{b, c\}\}, \\ &\mathcal{F}_3(A) = \{\{b\}, \{a, c\}\}, \\ &\mathcal{F}_4(A) = \{\{c\}, \{a, b\}\}, \\ &\mathcal{F}_5(A) = \{\{a, b, c\}\}. \end{aligned}$$

Primjenom teorema 4.19 proizlazi da svaka particija skupa A određuje odgovarajuću relaciju ekvivalencije $R_i \subseteq A^2$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ na skupu A, stoga navedenim particijama skupa A, $\mathcal{F}_i(A)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, redom su određene sljedeće relacije ekvivalencija na skupu A:

$$R_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\},$$

$$R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)\},$$

$$R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(c,a)\},$$

$$R_4 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\},$$

$$R_5 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}.$$

S druge strane svaka particija skupa A jednaka je odgovarajućem kvocijentnom skupu skupa A modulo R. Pritom je: $\mathcal{F}_i(a) = A/_{R_i}$ za svaki $i = 1,2,3,4,5$.

4.1.2 Uređajne relacije

Definicija 4.21

Binarna relacija $R \subseteq A^2$ na skupu A koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna naziva se **relacija parcijalnog uređaja** na skupu A.
Pritom se kaže da je (A,R) **parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju** R.

Zadatak 4.22

Dokažite da je:

1. $(\mathcal{P}(A),\subseteq)$ parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju $\subseteq$ ("*biti podskup*")

   Uputa: treba dokazati da je relacija $\subseteq$ na partitivnom skupu $\mathcal{P}(A)$ skupa A, relacija parcijalnog uređaja na $\mathcal{P}(A)$;

2. $(\mathbb{N},\leq)$ parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju $\leq$ ("*biti manji ili jednak*")

   Uputa: treba dokazati da je relacija $\leq$ na skupu $\mathbb{N}$ (prirodnih brojeva), relacija parcijalnog uređaja na $\mathbb{N}$, vidi primjer 4.25.

Primjer 4.23

Primijetimo da $(\mathbb{N},<)$ nije parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju $<$ ("*biti manji*"), jer relacija $<$ na skupu $\mathbb{N}$ nije relacija parcijalnog uređaja na $\mathbb{N}$.
Konkretno, (binarna) relacija $<$ na skupu $\mathbb{N}$ nije refleksivna, jer ne postoji prirodan broj $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x < x$.

Analogno, $(\mathbb{N},>)$ nije parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju $>$ ("*biti veći*"), jer relacija $>$ na skupu $\mathbb{N}$ nije refleksivna, a time niti relacija parcijalnog uređaja.

Definicija 4.24

Elementi a **i** b **iz skupa** A **su usporedivi obzirom na relaciju** $R \subseteq A^2$ ako i samo ako je

$$a\,R\,b \ \vee \ b\,R\,a.$$

Parcijalno uređeni skup (A,R) obzirom na relaciju $R \subseteq A^2$ u kojem su svaka dva elementa usporediva obzirom na relaciju R naziva se **potpuno** (totalno ili linearno) **uređeni skup**.

Primjer 4.25

Dokažimo da je $(\mathbb{N}, \leq)$ potpuno uređeni skup.

Rješenje:

Da bismo dokazali da je $(\mathbb{N}, \leq)$ potpuno uređeni skup, najprije treba dokazati da je $(\mathbb{N}, \leq)$ parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju "biti manji ili jednak".
U suglasnosti s definicijom 4.21 proizlazi da će $(\mathbb{N}, \leq)$ biti parcijalno uređeni skup, ako dokažemo da je relacija "biti manji ili jednak" refleksivna, antisimetrična i tranzitivna (odnosno relacija parcijalnog uređaja) na skupu $\mathbb{N}$. Lako se vidi da vrijedi:

- ◎ refleksivnost: $(\forall\, x \in \mathbb{N}) \qquad x \leq x\,,$
- ◎ antisimetričnost: $(\forall\, x, y \in \mathbb{N}) \qquad (x \leq y \;\wedge\; y \leq x) \;\Rightarrow\; x = y\,,$
- ◎ tranzitivnost: $(\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}) \quad (x \leq y \;\wedge\; y \leq z) \;\Rightarrow\; x \leq z\,,$

stoga zaključujemo da je $(\mathbb{N}, \leq)$ parcijalno uređeni skup.
Nadalje, primijetimo da za bilo koja dva prirodna broja $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $x \leq y$ ili $y \leq x$, stoga primjenom definicije 4.24 zaključujemo da su svi elementi skupa $\mathbb{N}$ usporedivi obzirom na relaciju "biti manji ili jednak".
Time je $(\mathbb{N}, \leq)$ potpuno uređeni skup.

Primjer 4.26

$(\mathbb{N}, <)$ i $(\mathbb{N}, >)$ nisu potpuno uređeni skupovi, jer oni nisu parcijalno uređeni skupovi, vidi primjer 4.23.

Zadatak 4.27

Dokažite:

- ako je A neprazan skup koji sadrži barem dva različita elementa, onda $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nije potpuno uređeni skup;
- ako je $A = \emptyset$ ili ako je A jednočlani skup, onda je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ potpuno uređeni skup,

gdje je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup skupa A.

Definicija 4.28

Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređeni skup obzirom na relaciju $\leq$.

Ako su $a, b, c \in S$ takvi da je $a < b$ i $b < c$, onda kažemo da je **element** b **između elemenata** a i c i pišemo: $a < b < c$.

Ako su $a, b \in S$ takvi da je $a < b$, onda kažemo da je a **prethodnik od** b i da je b **sljedbenik od** a, **obzirom na relaciju** $\leq$.

Ako su $a, b \in S$ takvi da je $a < b$ i da nema nijednog elementa iz S koji je između a i b, onda kažemo da je a **direktni prethodnik od** b i da je b **direktni sljedbenik od** a, **obzirom na relaciju** $\leq$.

Primjer 4.29

Konkretno, u parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \leq)$:

- prirodan broj 2 je između prirodnih brojeva 1 i $5,$ jer je $1 < 2 < 5$;
- prirodan broj 2 je prethodnik prirodnog broja 5 i prirodan broj 5 je sljedbenik prirodnog broja 2;
- prirodan broj 1 je direktni prethodnik prirodnog broja 2 i prirodan broj 2 je direktni sljedbenik prirodnog broja 1;
- prirodan broj 2 nije direktni prethodnik prirodnog broja 5 i prirodan broj 5 nije direktni sljedbenik prirodnog broja 2.
- direktni prethodnik prirodnog broja 5 je prirodan broj 4 i direktni sljedbenik prirodnog broja 5 je prirodan broj 6.

U parcijalno uređenom skupu $(\mathbb{N}, \leq)$ vrijedi:

- prirodan broj 1 nema direktnog prethodnika,
- svaki prirodan broj osim broja 1 ima direktnog prethodnika,
- svaki prirodan broj ima direktnog sljedbenika.

5 Funkcije

Pod pojmom funkcije podrazumijeva se postupak kojim se svakom elementu jednog skupa (domene) pridružuje točno jedan element drugog skupa (kodomene), te kažemo da se svaki element domene preslikava na točno jedan element kodomene.
Navedimo da su pojmovi preslikavanje i pridruživanje zapravo osnovni pojmovi koji se matematički ne definiraju, jer se podrazumijeva da oni imaju jasno značenje.

U nastavku ćemo funkciju najprije definirati kao jedan specijalan slučaj binarne relacije na $A \times B$ koja je totalna i funkcijska. Pritom A i B mogu biti različiti ili jednaki skupovi.

Dakle, svaka funkcija je ujedno i relacija, ali obrat ne vrijedi: svaka relacija ne mora biti funkcija.

Općenito, funkcija je bilo koja relacija na kartezijevom produktu od $n+1$ nepraznih skupova koja je totalna i funkcijska relacija, gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj. U ovom kolegiju neće se promatrati relacije za $n > 1$, već samo one binarne relacije ($n = 1$) koje su ujedno i funkcije.

Definicija 5.1

Za binarnu relaciju $R \subseteq A \times B$ na $A \times B$ kažemo da je

- **totalna relacija** ako vrijedi da

$$\text{za svaki } a \in A \quad \text{postoji } b \in B \quad \text{takav da je} \quad a\,R\,b$$

- **funkcijska relacija** ako vrijedi

$$\text{za svaki } a \in A \qquad \text{ako je } \ (a\,R\,b_1 \ \wedge \ a\,R\,b_2), \ \text{ onda je } \ b_1 = b_2.$$

Napomena:

◇ Za binarnu relaciju $R \subseteq A \times B$ na $A \times B$ kažemo da je totalna i funkcijska ako:

$$\text{za svaki } a \in A \quad \text{postoji točno jedan } b \in B \quad \text{takav da je} \quad a\,R\,b.$$

Definicija 5.2

Binarna relacija $R \subseteq A \times B$ koja je totalna i funkcijska naziva se **funkcija** (**preslikavanje**) sa skupa A u skup B i označava $R\colon A \to B$, pri čemu se skup A naziva **domena** (ili područje definicije) funkcije R, a skup B **kodomena** funkcije R.

Napomena:

Funkcije obično označavamo malim slovima $f, g, h, \ldots$, stoga ćemo u nastavku umjesto $R\colon A \to B$ pisati $f\colon A \to B$.
Pritom kažemo da je $f\colon A \to B$ funkcija (ili preslikavanje) f sa skupa A u skup B, gdje skup A nazivamo domenom (ili područjem definicije) funkcije f, a skup B kodomenom funkcije f.

- U suglasnosti s definicijama 5.1 i 5.2 proizlazi da je funkcija $f\colon A \to B$ svaki podskup skupa $A \times B$ (tj. $f \subseteq A \times B$) za koji vrijedi da:
$$(\forall\, a \in A)\ (\exists!\, b \in B) \quad \text{takav da je} \quad a\, f\, b$$
ili ekvivalentno: $(a, b) \in f$ te kažemo da je b slika elementa a u odnosu na funkciju f i pišemo: $f(a) = b$.
Primijetimo da je zapis $f(a) = b$ ekvivalentan zapisu $(a, b) \in f$, odnosno $a\, f\, b$.

Dakle, funkcija $f\colon A \to B$ je dobro definirana ako vrijedi da
$$(\forall\, x \in A)\ (\exists!\, y \in B) \quad \text{takav da je} \quad f(x) = y.$$

Funkcije se mogu zadati tablicom, analitički, grafički, rekurzivno, ...
Najčešće se koristi analitički način zadavanja funkcije.

- Primjer tabličnog zadavanja funkcije f:
neka su zadani skupovi $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4\}$
i neka je funkcija $f\colon A \to B$ zadana slijedećom tablicom:

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	3	2	4

Primijetimo da iz zadane tablice proizlazi:
$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 2,\ f(d) = 4.$$

- Primjer analitičkog zadavanja funkcije f:
neka je zadana funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(x) = x + 1$.

Primjer 5.3

Neka su zadani skupovi $A = \{a, b, c, d\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Je li dobro definirana funkcija $f\colon A \to B$ zadana slijedećom tablicom ako je

(a)

x	a	b	c	d
$f(x)$	1	3	2	4

(b)

x	a	b	c	a	d
$f(x)$	1	3	2	4	5

(c)

x	a	c	d
$f(x)$	1	3	2

Rješenje:

Ponovimo, u suglasnosti s definicijom 5.2 proizlazi da je funkcija zapravo relacija koja je totalna i funkcijska. Time preslikavanje f promatramo kao relaciju $f \subseteq A \times B$ za koju vrijedi: $(\forall\, x \in A)\ (\exists!\, y \in B)$ takav da je $x\, f\, y$, odnosno $f(x) = y$. Time zaključujemo:

(a) funkcija f je dobro definirana, jer se svaki element skupa A preslikava na točno jedan element skupa B;

(b) funkcija f nije dobro definirana, jer f nije funkcijska relacija;
konkretno, $f(a) = 1 \wedge f(a) = 4$, ali $1 \neq 4$;

(c) funkcija f nije dobro definirana, jer f nije totalna relacija; konkretno, $b \in A$ ne preslikava se u nijedan element skupa B, tj. u skupu B ne postoji element takav da je slika elementa $b \in A$.

5.1 Domena, kodomena i područje vrijednosti funkcije

Neka je zadana funkcija $f\colon A \to B$. Područje definicije funkcije f, odnosno domena funkcije f je skup na kojemu je funkcija f dobro definirana.

Ponovimo, funkcija $f\colon A \to B$ je dobro definirana na skupu A ako se svaki element iz skupa A preslikava u točno jedan element skupa B i kažemo da je skup A područje definicije (domena) funkcije f, a skup B kodomena funkcije f.

- Ako je $B \subseteq \mathbb{R}$, onda kažemo da je $f\colon A \to B$ **realna funkcija**.

Dakle, svaka funkcija kojoj je kodomena podskup skupa $\mathbb{R}$ (realnih brojeva) naziva se realnom funkcijom.

- Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ i $B \subseteq \mathbb{R}$, onda funkciju $f\colon A \to B$ nazivamo **realnom funkcijom realne varijable**.

Dakle, svaka funkcija kojoj su domena i kodomena podskupovi skupa $\mathbb{R}$ naziva se realnom funkcijom realne varijable.

> Skup A (područje definicije, tj. domenu funkcije f) nazivamo **prirodnim područjem definicije, tj. prirodnom domenom funkcije** f ako je skup A najveći podskup skupa $\mathbb{R}$ za koji je funkcija f dobro definirana.

Standardna oznaka za domenu (područje definicije) funkcije f je $\mathcal{D}(f)$, a za kodomenu funkcije f je $\mathcal{K}(f)$.

No, treba napomenuti da se u slučaju realne funkcije realne varijable uobičajeno koristi oznaka $\mathcal{D}(f)$ za njezino prirodno područje definicije, tj. njezinu prirodnu domenu. Pritom treba uočiti da je područje definicije realne funkcije realne varijable, zapravo, podskup njezinog prirodnog područja definicije.

Konkretno, za realnu funkciju realne varijable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ skup $\mathbb{R}$ je njezino prirodno područje definicije, jer je ta funkcija (dobro) definirana za sve realne brojeve. Specijalno, svaki pravi podskup skupa $\mathbb{R}$ može biti njezino područje definicije.

Kodomena realne funkcije realne varijable standardno se označava s $\mathcal{K}(f)$.

Primjer 5.4

U nastavku ćemo navesti neke elementarne realne funkcije realne varijable i njihova prirodna područja definicije $\mathcal{D}(f)$.

Dakle, za realne funkcije realne varijable, $f\colon \mathcal{D}(f) \to \mathcal{K}(f)$, gdje je $\mathcal{D}(f), \mathcal{K}(f) \subseteq \mathbb{R}$, vrijedi:

1. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R},$

   pri čemu se funkcija f naziva polinomom n-tog stupnja realne varijable x, a proizvoljni realni brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nazivaju se koeficijentima tog polinoma;

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\};$

3. $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f) = [0, +\infty\rangle$;
4. $f(x) = \log_a x$ ili $f(x) = \ln x$, $\mathcal{D}(f) = \langle 0, +\infty\rangle$;
5. $f(x) = a^x$ ili $f(x) = e^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;
6. $f(x) = \sin x$ ili $f(x) = \cos x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;
7. $f(x) = \arcsin x$ ili $f(x) = \arccos x$, $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$;
8. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right\rangle$;
9. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\mathcal{D}(f) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle k\pi, \pi + k\pi\rangle$;
10. $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ili $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$.

Primijetimo da u kodomeni funkcije f može postojati barem jedan element koji nije slika nijednog elementa iz skupa A u odnosu na funkciju f. Iz tog se razloga u kodomeni funkcije f definira područje vrijednosti funkcije f koji je zapravo skup svih slika elemenata iz skupa A u odnosu na funkciju f.
Konkretno, pod slikom elementa x iz skupa A u odnosu na funkciju f podrazumijeva se vrijednost $f(x)$ funkcije f za element x iz skupa A.

Područje vrijednosti funkcije (preslikavanja) $f\colon A \to B$ je skup, u oznaci $Im\, f$, koji se definira na sljedeći način:

$$Im\, f = \{f(x) \in B \mid x \in A\}.$$

Time je: $Im\, f \subseteq \mathcal{K}(f)$, gdje je $\mathcal{K}(f) = B$ (kodomena funkcije f).

Oznaka $Im\, f$ preuzeta od skraćenice engleskih riječi "image of function" f.
Uz oznaku $Im\, f$ za područje vrijednosti funkcije f koristi se često i oznaka $f(A)$.

Primjer 5.5

Za funkciju $f\colon A \to B$ zadanu tablicom oznakom (a) u primjeru 5.3, skup:
$\mathcal{D}(f) = A = \{a, b, c, d\}$ je područje definicije (domena) funkcije f,
$\mathcal{K}(f) = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je kodomena funkcije f,
$Im\, f = \{1, 2, 3, 4\}$ je područje vrijednosti funkcije f.

Primjer 5.6

Neka je zadana realna funkcija realne varijable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$. Tada:
prirodno područje definicije (prirodna domena) funkcije f je skup $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,
kodomena funkcije f je skup $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$,
područje vrijednosti funkcije f je skup $Im\, f = \mathbb{R}$.

Primjer 5.7

Neka je zadana realna funkcija realne varijable $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = x^2 + 4.$ Tada:
prirodno područje definicije (prirodna domena) funkcije f je skup $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$,
područje definicije (domena) funkcije f je skup $\mathbb{R}^-$, gdje je $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$,
kodomena funkcije f je skup $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}_0^+$, gdje je $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$,
područje vrijednosti funkcije f je skup $Im\, f = [4, +\infty\rangle \subseteq \mathcal{K}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija 5.8

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **konstantna** ako i samo ako je $Im\, f$ jednočlani skup.

◇ Drugim riječima, funkcija $f\colon A \to B$ je konstantna ako i samo ako je $f(x) = c$ za svaki $x \in A$, gdje je $Im\, f = \{c\}$.

Specijalno, ako je $A = B = \mathbb{R}$ i ako je $f(x) = c$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ (tj. $Im\, f = \{c\}$), onda je graf konstantne funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravac $y = c$ koji je paralelan s x-osi i prolazi točkom $(0, c)$, gdje je $c \in \mathbb{R}$ proizvoljan realan broj.

Definicija 5.9

Za funkciju $f\colon A \to A$ kažemo da je **identiteta** ili **identično preslikavanje** na skupu A ako i samo ako je $f(x) = x$ za svaki $x \in A$.

Specijalno, ako je $A = \mathbb{R}$ i ako je $f(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, onda je graf identitete $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pravac $y = x$ (simetrala I. i III. kvadranta pravokutnog koordinatnog sustava ravnine).

Definicija 5.10

Za funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon C \to D$ kažemo da su **jednake** i pišemo $f = g$ ako i samo ako vrijedi:

1. $\mathcal{D}(f) = D(g)$ (funkcije f i g imaju jednake domene),
2. $\mathcal{K}(f) = K(g)$ (funkcije f i g imaju jednake kodomene),
3. $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}(f)(= \mathcal{D}(g))$

   funkcije f i g poprimaju jednake vrijednosti za sve elemente iz domene funkcije f (tj. funkcije g).

Primjer 5.11

Ispitajmo jesu li jednake sljedeće realne funkcije realne varijable ako je

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ i $g\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty\rangle,\ g(x) = x^2$

Rješenje: $f \neq g$, jer je $\mathcal{K}(f) \neq K(g)$.

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 1$

Rješenje: $f \neq g$, jer je $f(x) \neq g(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $\mathcal{D}(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x + 1,\ g(x) = 10^{\log(x+1)}$

Rješenje:

Budući da za zadane realne funkcije f i g nisu eksplicitno navedene njihove kodomene, možemo pretpostaviti da vrijedi: $\mathcal{K}(f) = K(g) = \mathbb{R}$, (tj. da su im kodomene jednake skupu realnih brojeva). No, treba napomenuti da im općenito kodomene (podskupovi skupa $\mathbb{R}$) ne moraju biti jednake.

Nadalje, primjenom svojstva $a^{log_a x} = x$ direktno proizlazi $10^{\log(x+1)} = x + 1$, stoga dobivamo: $f(x) = g(x)$ za svaki x.

Odredimo sada (prirodne) domene, tj. prirodna područja definicije realnih funkcija f i g.

Primijetimo da je funkcija $f(x) = x + 1$ definirana za sve realne brojeve, stoga je

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}.$$

S druge strane, za zadanu funkciju $g(x) = 10^{\log(x+1)}$ treba postaviti uvjet:

$$x + 1 > 0,$$

jer je logaritamska funkcija definirana za strogo pozitivne realne brojeve (usporedite s oznakom 4 u primjeru 5.4).

Nadalje, iz $x + 1 > 0$ proizlazi: $x > -1$, stoga je:

$$D(g) = \langle -1, +\infty \rangle.$$

Time smo dobili da je $\mathcal{D}(f) \neq D(g)$, odakle slijedi $f \neq g$.

Dakle, zadane realne funkcije nisu jednake, jer nemaju jednake (prirodne) domene.

(d) $f, g\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,3,6,10,15\},\quad f(x) = \dfrac{x(x+1)}{2},\quad g(x) = 1 + 2 + \cdots + x.$

Rješenje: $f = g$, jer je:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= D(g) = \{1,2,3,4,5\},\\ \mathcal{K}(f) &= K(g) = \{1,3,6,10,15\},\\ f(x) &= g(x) \quad \text{za svaki } x \in \{1,2,3,4,5\}. \end{aligned}$$

Za vježbu, uvjerite se da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in \{1,2,3,4,5\}$.

Definicija 5.12

Neka je zadana funkcija $f : A \to B$ i neka je $A_1 \subseteq A$, gdje je $A_1 \neq \emptyset$.

Funkcija $f_1 : A_1 \to B$ takva da je $f_1(x) = f(x)$ za svaki $x \in A_1$ naziva se **restrikcija funkcije** f i označava s $f_1 = f/A_1$.

Pritom se funkcija f naziva **proširenje funkcije** f_1.

5.2 Surjekcija, injekcija, bijekcija

Definicija 5.13

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **surjekcija** (ili surjektivno preslikavanje) ako je

$$Im\, f = B.$$

◇ Drugim riječima, funkcija $f\colon A \to B$ je surjekcija ako

$$\text{za svaki } y \in B \quad \text{postoji } x \in A \quad \text{takav da je} \quad y = f(x),$$

što se interpretira da je svaki element iz skupa B (kodomene funkcije f) slika barem jednog elementa iz skupa A (domene funkcije f).

Definicija 5.14

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **injekcija** (ili injektivno preslikavanje) ako

$$\text{za svaki } x_1, x_2 \in A \qquad \text{ako je } x_1 \neq x_2, \quad \text{onda je} \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

◇ Navedeno svojstvo često zapisujemo u obliku:

$$(\forall\, x_1, x_2 \in A) \qquad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Definicija 5.15

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je **bijekcija** (bijektivno preslikavanje ili obostrano jednoznačno preslikavanje) ako je funkcija f surjekcija i injekcija.

◇ Drugim riječima, funkcija $f\colon A \to B$ je bijekcija ako

$$\text{za svaki } y \in B \quad \text{postoji točno jedan } x \in A \quad \text{takav da je} \quad y = f(x),$$

što se interpretira da je svaki element iz skupa B (kodomene funkcije f) slika točno jednog elementa iz skupa A (domene funkcije f).

Primjenom definicije 5.13 proizlazi da se definicija 5.15 može iskazati i na sljedeći način.

Definicija 5.16

Za funkciju $f\colon A \to B$ kažemo da je bijekcija ako je $Im\, f = B$ i ako je f injekcija.

5.3 Kompozicija funkcija

Definicija 5.17

Neka su zadane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon C \to D$, gdje je $A = \mathcal{D}(f)$ i $C = \mathcal{D}(g)$. Ako je $Im\, f \subseteq C$, onda se funkcija $h\colon A \to D$, u oznaci $h = g \circ f$, definirana s

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{za svaki } x \in A$$

naziva **kompozicija funkcija** f i g.

Napomena:

Podsjetimo se, po definiciji funkcije ako je zadana funkcija

$f\colon A \to B$, onda za svaki $x \in A$ postoji jedinstven $y \in B$ takav da je $f(x) = y$

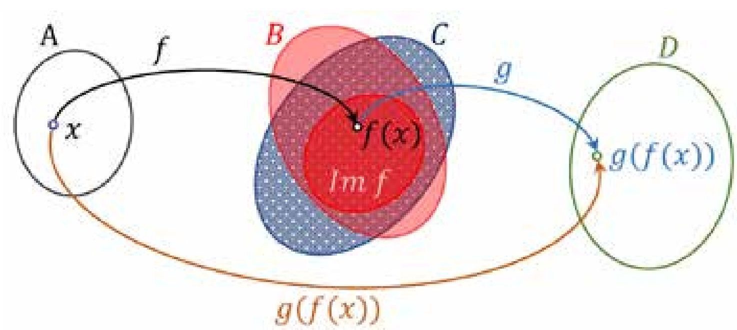
i ako je zadana funkcija

$g\colon C \to D$, onda za svaki $y \in C$ postoji jedinstven $z \in D$ takav da je $g(y) = z$.

Primijetimo sljedeće:

1. općenito su B i C različiti skupovi, stoga kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g ima smisla samo za one elemente x iz skupa A za koje se $f(x)$ nalazi u presjeku skupova B i C;

2. svaki element iz skupa $B \cap C$ ne mora biti ujedno i slika nekog elementa iz skupa A (domene funkcije f), stoga je $Im\, f \subseteq B \cap C$.



Slika 14: Kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g

Podsjetimo se da za svaku funkciju $f\colon A \to B$ vrijedi da je $Im\, f \subseteq B$, gdje je B kodomena funkcije f, stoga će kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g biti (dobro) definirana ako je $Im\, f \subseteq C$. Primijetimo da se uvjetom $Im\, f \subseteq C$ podrazumijeva da je $Im\, f \subseteq B \cap C$.

S druge strane, ako je zadana funkcija $h\colon A \to D$, onda za svaki $x \in A$ postoji jedinstven $z \in D$ takav da je $h(x) = z$.

Međutim, proizvoljna funkcija sa skupa A u skup D općenito nije kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g, stoga se ona treba definirati.

Dakle, ako su zadane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon C \to D$ i ako vrijedi da je $Im\, f \subseteq C$, onda definiramo da je kompozicija $g \circ f$ funkcija f i g takva funkcija $h\colon A \to D$ za koju vrijedi:

$$h(x) = g(f(x)) \quad \text{za svaki } x \in A$$

i pišemo: $h = g \circ f$.
Pritom je: $$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z,$$

gdje je $x \in A,\ y \in Im\, f \subseteq C,\ z \in D$.

Napomena:

Analogno, ako za zadane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon C \to D$ vrijedi da je $Im\, g \subseteq A$, onda kompozicija $f \circ g$ funkcija g i f je takva funkcija $l\colon C \to B$ za koju vrijedi:

$$l(x) = f(g(x)) \quad \text{za svaki } x \in C$$

i pišemo: $l = f \circ g$.
Pritom je: $$l(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(y) = z,$$

gdje je $x \in C,\ y \in Im\, g \subseteq A,\ z \in B$.

- Ako postoji jedna od kompozicija $g \circ f$ ili $f \circ g$, onda ne mora postojati ona druga.
- Za kompoziciju funkcija općenito ne vrijedi svojstvo komutativnosti.
  Drugim riječima općenito je $g \circ f \neq f \circ g$, ali postoje funkcije za koje vrijedi $g \circ f = f \circ g$.

Primjer 5.18

Neka su zadane funkcije

$$f\colon \langle -2, 2] \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 2x + 1$$
$$g\colon [-4, 6] \to \mathbb{R},\ \ g(x) = 3x - 4$$

Tada je $Im\, f = \langle -3, 5] \subseteq [-4, 6]$, stoga je kompozicija $g \circ f$ definirana, ali
$Im\, g = [-16, 14] \nsubseteq \langle -2, 2]$, stoga kompozicija $f \circ g$ nije definirana.

Primjer 5.19

Neka su zadane funkcije

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 2x + 1$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = 3x - 4$$

Tada je $Im\, f = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ i $Im\, g = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, stoga su definirane kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$.
Pritom je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 3(2x + 1) - 4 = 6x + 3 - 4 = 6x - 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 4) = 2(3x - 4) + 1 = 6x - 8 + 1 = 6x - 7$$

odakle proizlazi $g \circ f \neq f \circ g$.

Primjer 5.20

Neka su zadane funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je $f(x) = x + 1$ i $g(x) = \sin x$.
Tada su kompozicije funkcija $g \circ f$ i $f \circ g$ dobro definirane, jer je $Im\, f = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ i $Im\, g = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Pritom je

$$(g \circ f)(x) = g(x + 1) = \sin(x + 1),$$
$$(f \circ g)(x) = f(\sin x) = \sin x + 1,$$

odakle slijedi $g \circ f \neq f \circ g$.

Primjer 5.21

Neka su zadane funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ i $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$, gdje je $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.
Tada je $Im\, f = [-4, +\infty\rangle \nsubseteq \mathbb{R}^+$ i $Im\, g = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$,
stoga kompozicija $g \circ f$ nije definirana, a kompozicija $f \circ g$ je definirana. Pritom je

$$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = (\ln x)^2 - 4 = \ln^2 x - 4$$

gdje je $x \in \mathbb{R}^+$.

U nastavku ćemo bez dokaza navesti neka svojstva kompozicija funkcija.

Propozicija 5.22

Neka je $e\colon A \to A$, $e(x) = x$ za svaki $x \in A$ identiteta (identično preslikavanje) na skupu A. Tada za svako preslikavanje $f\colon A \to A$ vrijedi da je $f \circ e = e \circ f = f$.

Propozicija 5.23

Neka su zadane funkcije $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ i $h\colon E \to F$ takve da je $Im\, f \subseteq C$ i $Im\, g \subseteq E$. Tada vrijedi svojstvo asocijativnosti za kompoziciju funkcija:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

za svaki $x \in A$.

Propozicija 5.24

Neka su zadane funkcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to C$ takve da su f i g bijekcije. Tada je i kompozicija funkcija $g \circ f\colon A \to C$ (funkcija f i g) također bijekcija.

5.4 Inverzna funkcija

Ako je funkcija $f\colon A \to B$ injekcija, onda svakoj slici (vrijednosti) $y \in Im\, f$ funkcije f odgovara jedinstveni original $x \in A$ te slike, takav da je $f(x) = y$.
Drugim riječima, primijetimo da zadana funkcija po pretpostavci nije surjekcija, stoga u skupu B mogu postojati neki elementi koji nisu slike nijednog elementa iz skupa A u odnosu na funkciju f, stoga se u skupu B promatra skup $Im\, f$ (područje vrijednosti funkcije f) za koji vrijedi da je svaki element $f(x) \in Im\, f$ slika točno jednog elementa iz skupa A, jer je f injekcija.

Time možemo definirati funkciju

$$f^{-1}\colon Im\, f \to A, \quad f^{-1}(y) = x,$$

gdje je x onaj (jedinstveni) element iz skupa $A = \mathcal{D}(f)$ za kojeg vrijedi $f(x) = y$.

Funkciju f^{-1} nazivamo **inverznom funkcijom (inverzom) funkcije** f. Pritom vrijedi:

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = Im\, f \qquad \text{i} \qquad Im\, f^{-1} = \mathcal{D}(f),$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathcal{D}(f), \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y \quad \text{za svaki} \quad y \in \mathcal{D}(f^{-1}),$$

odnosno $\quad f^{-1} \circ f = i_A, \quad f \circ f^{-1} = i_{Im\, f},$

gdje i_A označava identitetu na skupu A, a $i_{Im\, f}$ identitetu na skupu $Im\, f \subseteq B$.

Propozicija 5.25

Za funkciju $f\colon A \to B$ postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon B \to A$ ako i samo ako je f bijekcija.

Dakle, ako je $f\colon A \to B$ bijekcija takva da je

$$f(x) = y \quad \text{za svaki} \ x \in A, \qquad \text{onda je} \quad f^{-1}(y) = x \quad \text{za svaki} \ y \in B. \tag{1}$$

Primijetimo da propozicija 5.25 direktno proizlazi iz gore navedenih razmatranja, gdje se pretpostavljalo da je funkcija f injekcija i činjenice da je surjektivnost funkcije f ekvivalentna s $Im\, f = B$, vidi definiciju 5.16.

Time vrijedi: ako je funkcije f bijekcija, onda je i f^{-1} bijekcija.

Primjenom definicije 5.16 proizlazi da se propozicija 5.25 može iskazati i na sljedeći način.

Za funkciju $f\colon A \to B$ postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon B \to A$ ako i samo ako je f injekcija i ako je $Im\, f = B$.

Propozicija 5.26

Ako je funkcija f^{-1} bijekcija, onda je $(f^{-1})^{-1} = f$.

Ako su funkcije $f, g\colon A \to A$ bijekcije (na A), onda je $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

U nastavku ćemo riješiti nekoliko tipova zadataka zadanih u zadacima za samostalni rad.

Primjer 5.27

Odredimo inverznu funkciju funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = (4x-9)^3+5$.

Rješenje:

Uočimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R},\ \mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$ i $Im\, f = \mathbb{R}$ te da iz $Im\, f = \mathcal{K}(f)$ proizlazi da je zadana funkcija surjekcija. Treba provjeriti je li funkcija f injekcija.
Primjenom definicije 5.14 treba pokazati da vrijedi:

$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \qquad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2.$$

Uočimo da iz $f(x_1) = f(x_2)$ proizlazi:

$$\begin{aligned}(4x_1-9)^3+5 &= (4x_2-9)^3+5\\ (4x_1-9)^3 &= (4x_2-9)^3 \quad /\sqrt[3]{\ }\end{aligned}$$

odakle primjenom svojstva:[2] za svaki $x, y \in \mathbb{R}$, ako je $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y}$, onda je $x = y$, slijedi

$$\begin{aligned}4x_1 - 9 &= 4x_2 - 9\\ 4x_1 &= 4x_2\\ x_1 &= x_2,\end{aligned}$$

stoga je funkcija f injekcija, odnosno bijekcija (jer smo prethodno pokazali da je ona i surjekcija). Nadalje, primjenom propozicije 5.25 proizlazi da postoji inverzna funkcija f^{-1} funkcije f pa se u izračunavanju funkcije f^{-1} mogu koristiti sljedeći identiteti $f(x) = y,\ f^{-1}(y) = x$, vidi (1). Time iz:

$$f(x) = (4x-9)^3+5$$

dobivamo:

$$y = (4\,f^{-1}(y)-9)^3+5$$

odakle proizlazi:

$$\begin{aligned}(4\,f^{-1}(y)-9)^3 &= y-5\\ 4\,f^{-1}(y)-9 &= \sqrt[3]{y-5}\\ 4\,f^{-1}(y) &= \sqrt[3]{y-5}+9\end{aligned}$$

odnosno: $f^{-1}(y) = \dfrac{\sqrt[3]{y-5}+9}{4}$.

Iz dobivene funkcije f^{-1} direktno proizlazi da je njezino prirodno područje definicije jednako skupu realnih brojeva i pišemo: $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

[2] treći korijen (kao i svaki neparni korijen) je bijekcija; s druge strane treba primijetiti da drugi korijen (kao i svaki parni korijen) nije bijekcija, jer za svaki $x \geq 0$ je $\sqrt{x} = \pm\, y$, gdje je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $(\pm\, y)^2 = x$, vidi primjer 5.29

Primjer 5.28

Odredimo prirodno područje definicije $\mathcal{D}(f)$ i područje vrijednosti $Im\, f$ realne funkcije realne varijable tako da ona bude bijekcija ako je

$$f(x) = \frac{2x-5}{-4x+7}.$$

Rješenje:

Zadana funkcija je racionalna funkcija za koju treba postaviti uvjet da je njezin nazivnik različit od nule. Dakle, iz: $-4x+7 \neq 0$, proizlazi: $x \neq \frac{7}{4}$, stoga je:

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{7}{4} \right\}.$$

Provjerimo sada je li zadana funkcija injekcija, odnosno vrijedi li za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{7}{4} \right\}$ da iz identiteta $f(x_1) = f(x_2)$ proizlazi $x_1 = x_2$.

Dakle, iz pretpostavke $f(x_1) = f(x_2)$ obzirom na zadanu funkciju, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{2x_1-5}{-4x_1+7} &= \frac{2x_2-5}{-4x_2+7} \\ -8x_1x_2 + 14x_1 + 20x_2 - 35 &= -8x_1x_2 + 14x_2 + 20x_1 - 35 \\ -6x_1 &= -6x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

odakle proizlazi da je zadana funkcija injekcija. Primjenom propozicije 5.25 za zadanu funkciju f postojat će inverzna funkcija f^{-1}, ako pretpostavimo da je: $\mathcal{D}(f^{-1}) = Im\, f$ čime možemo koristiti identitete $f(x) = y$, $f^{-1}(y) = x$, stoga iz

$$f(x) = \frac{2x-5}{-4x+7}$$

proizlazi: $y = \dfrac{2f^{-1}(y)-5}{-4f^{-1}(y)+7}$, odnosno:

$$\begin{aligned} -4yf^{-1}(y) + 7y &= 2f^{-1}(y) - 5 \\ 4yf^{-1}(y) + 2f^{-1}(y) &= 7y + 5 \\ f^{-1}(y)(4y+2) &= 7y + 5 \end{aligned}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{7y+5}{4y+2}, \quad y \neq -\frac{1}{2}.$$

Time je: $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, odnosno

$$Im\, f = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{1}{2} \right\}.$$

Zaključujemo: funkcija $f\colon \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{7}{4} \right\} \to \mathbb{R} \backslash \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, $f(x) = \dfrac{2x-5}{-4x+7}$ je bijekcija, stoga postoji inverzna funkcija f^{-1} funkcije f, pri čemu je:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}\backslash\left\{-\tfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}\backslash\left\{\tfrac{7}{4}\right\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{7x+5}{4x+2}.$$

Podsjetimo se, budući da je zadana realna funkcija bijekcija, vrijedi da je $Im\, f = \mathcal{K}(f)$, gdje je $\mathcal{K}(f)$ kodomena funcije f, vidi definiciju 5.16.

Primjer 5.29

Odredimo prirodno područje definicije $\mathcal{D}(f)$ i područje vrijednosti $Im\, f$ realne funkcije realne varijable tako da ona bude bijekcija ako je

$$f(x) = -x^2 + x + 12.$$

Rješenje:

Ponovimo, skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva je prirodno područje definicije svake kvadratne funkcije. Međutim, kvadratna funkcija nije injekcija na cijelom svom prirodnom području definicije, odnosno na skupu $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, stoga treba odrediti onaj podskup od $\mathcal{D}(f)$ na kojemu će zadana kvadratna funkcija biti injekcija.

S druge strane, kodomena kvadratne funkcije je skup realnih brojeva, ali to nije područje vrijednosti kvadratne funkcije, što ima za posljedicu da kvadratna funkcija nije surjekcija na skupu $\mathbb{R}$, stoga treba odrediti $Im\, f$ (područje vrijednosti funkcije f).

Podsjetimo se, graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ je parabola $y = ax^2 + bx + c$ koja je otvorom okrenuta prema

pozitivnom dijelu y-osi ako je $a > 0$,

negativnom dijelu y-osi ako je $a < 0$.

Pritom je parabola simetrična obzirom na pravac $x = -\frac{b}{2a}$, gdje je $-\frac{b}{2a}$ prva koordinata (apscisa) tjemena parabole $y = ax^2 + bx + c$.

Dakle, da bismo odredili $Im\, f$ (područje vrijednosti funkcije f) i podskup od $\mathcal{D}(f)$ na kojemu je kvadratne funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ injekcija, dovoljno je odrediti koordinate tjemena primjenom formule:

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right). \tag{2}$$

Koristeći formulu (2) na zadanu kvadratnu funkciju $f(x) = -x^2 + x + 12$ dobivamo da je njeno tjeme u točki: $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$.

Napomena:

S motivacijom preciznijeg crtanja grafa zadane kvadratne funkcije (parabole) dodatno se izračunavaju i njezine nul-točke (iako one nemaju važniju ulogu u određivanju područja vrijednosti funkcije f kao ni u određivanju podskupa od $\mathcal{D}(f)$ na kojemu je kvadratna funkcija injekcija).

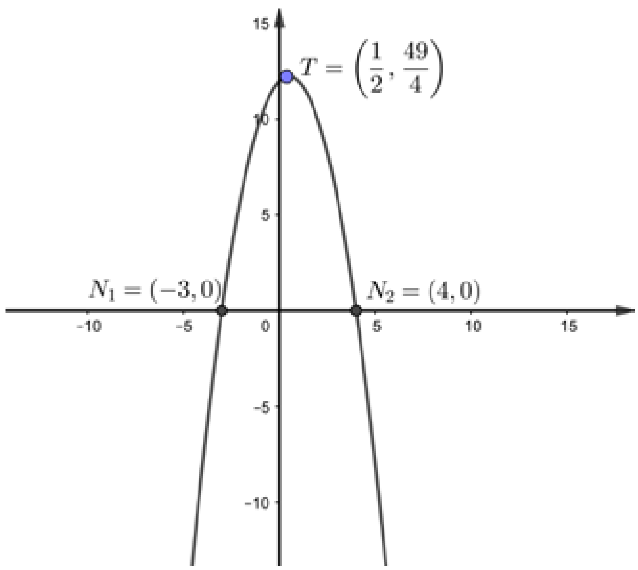
Ukratko, nul-točke kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ dobivamo rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$, odnosno kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ čija se rješenja x_1 i x_2 dobivaju primjenom formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3}$$

Obzirom na zadanu kvadratnu funkciju imamo sljedeću jednadžbu: $-x^2 + x + 12 = 0$, stoga primjenom formule (3) dobivamo:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{-2}$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{-2}$$

odakle proizlazi da je: $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.
Time su $N_1 = (-3, 0)$ i $N_2 = (4, 0)$ nul-točke zadane kvadratne funkcije $f(x) = -x^2+x+12$.
Kvadratni (vodeći) koeficijent $a = -1 < 0$ kvadratne funkcije $f(x) = -x^2 + x + 12$ je negativan broj, stoga je njezin graf (parabola) otvorom okrenut prema negativnom dijelu y-osi. Vidi sliku 15.



Slika 15: Parabola $y = -x^2 + x + 12$

Za svaki $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right]$ (lijeva grana parabole) ili za svaki $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ (desna grana parabole) zadana kvadratna funkcija je injekcija.
Područje vrijednosti funkcije f je skup $Im\, f = \left\langle -\infty, \frac{49}{4} \right]$, stoga za svaki $y \in \left\langle -\infty, \frac{49}{4} \right]$ zadana kvadratna funkcija je surjekcija.

Zaključujemo:

zadana kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 + x + 12$ je bijekcija ako je $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right]$ ili $\mathcal{D}(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ i ako je $Im\, f = \left\langle -\infty, \frac{49}{4} \right]$.

- Određivanje inverzne funkcije kvadratne funkcije.

  Najprije treba primijeniti svojstvo da se svaka kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ može pisati u obliku

$$f(x) = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0,$$

gdje su $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ i $y_0 = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ koordinate tjemena kvadratne funkcije.
Pritom se koristilo svojstvo da je:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

odakle proizlazi:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{4}$$

Primjenom svojstva (4) slijedi da se zadana kvadratna funkcija $f(x) = -x^2 + x + 12$ kojoj je tjeme u točki $T = \left(\frac{1}{2}, \frac{49}{4}\right)$ može pisati u obliku:

$$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}.$$

Odredimo sada inverznu funkciju f^{-1} funkcije f.

Obzirom na prethodno navedeno zaključujemo da vrijede identiteti $f(x) = y$ i $f^{-1}(y) = x$ za svaki $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right]$ i $y \in \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right]$ ili $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle$ i $y \in \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right]$, stoga iz

$$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

proizlazi

$$y = -\left(f^{-1}(y) - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}(y) - \frac{1}{2}\right)^2 &= -y + \frac{49}{4} \\ f^{-1}(y) - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{-y + \frac{49}{4}} \end{aligned}$$

Dakle, za bijektivnu funkciju $f_1\colon \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right] \to \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right]$, $f_1(x) = -x^2 + x + 12$ njezina inverzna funkcija je

$$f_1^{-1}\colon \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right] \to \left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right], \quad f_1^{-1}(x) = -\sqrt{-x + \frac{49}{4}} + \frac{1}{2}.$$

Analogno, za bijektivnu funkciju $f_2\colon \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle \to \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right]$, $f_2(x) = -x^2 + x + 12$ njezina inverzna funkcija je

$$f_2^{-1}\colon \left\langle -\infty, \frac{49}{4}\right] \to \left[\frac{1}{2}, +\infty\right\rangle, \quad f_2^{-1}(x) = \sqrt{-x + \frac{49}{4}} + \frac{1}{2}\,.$$

6 Skup prirodnih brojeva

Peanovi aksiomi [3] čine sustav aksioma kojima je definiran skup prirodnih brojeva:

1. $(\forall\, n \in \mathbb{N})\ \ (\exists!\, n+1 \in \mathbb{N})$ (za svaki prirodan broj postoji njegov direktni sljedbenik)
2. $(\forall\, n, m \in \mathbb{N}) \quad n+1 = m+1 \ \Leftrightarrow\ n = m$ (jedinstvenost direktnog sljedbenika)
3. $1 \in \mathbb{N}$
4. $(\forall\, n \in \mathbb{N}) \quad (n+1 \neq 1)$
5. **aksiom matematičke indukcije**

   ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je: $\quad 1 \in S \ \wedge$ (za svaki $k \in S$ vrijedi da je $(k+1) \in S$),
   onda je $S = \mathbb{N}$.

Primijetimo da iz trećeg i četvrtog aksioma proizlazi da je 1 najmanji prirodan broj, a iz prvog aksioma da za svaki prirodan broj n postoji njegov jedinstveni direktni sljedbenik $n+1$.

Peti aksiom matematičke indukcije primijenjuje se u metodi matematičke indukcije, kojom se provjerava, odnosno dokazuje vrijedi li neki identitet (ili formula) za sve prirodne brojeve.

Pritom se najprije definira, odnosno zadaje identitet (ili formula), a potom se primijenjuje metoda matematičke indukcije koja se sastoji od sljedeća tri koraka:

1. **baza indukcije**:

   provjeravamo vrijedi li zadani identitet (ili formula) za $n = 1$;

2. **pretpostavka indukcije**:

   pretpostavljamo da zadani identitet (ili formula) vrijedi za $n = k$, gdje je $k \in \mathbb{N}$;

3. **korak indukcije**:

   provjeravamo vrijedi li zadani identitet (ili formula) za $n = k+1$.

Ako dokažemo da zadani identitet (ili formula) vrijedi za $n = 1$ i za $n = k+1$ uz pretpostavku da vrijedi za $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, onda zaključujemo da zadani identitet (ili formula) vrijedi za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.

[3] Giuseppe Peano (1858. – 1932.) talijanski matematičar, jedan od utemeljitelja matematičke logike

Primjer 6.1

Dokažimo da vrijedi identitet $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ za sve prirodne brojeve.

Rješenje:

1. **baza indukcije**: provjeravamo vrijedi li zadani identitet za broj $n=1$:

$$1=\frac{1\cdot 2}{2} \quad \Rightarrow \quad 1=1$$

(dobili smo jednakost $1=1$ koja očito vrijedi, stoga je baza dokazana); $\blacksquare$

2. **pretpostavka indukcije**: pretpostavljamo da zadani identitet vrijedi za $n=k$:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

3. **korak indukcije**: provjeravamo vrijedi li zadani identitet i za $n=k+1$:

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{5}$$

- primjenom pretpostavke indukcije, raspisujemo lijevu stranu identiteta (5):

$$\begin{aligned} L \equiv \underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+k+1 \\ &= \frac{k^2+k+2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \equiv D \end{aligned}$$ $\blacksquare$

Dobili smo da je lijeva strana identiteta (5) jednaka desnoj strani identiteta (5), stoga zaključujemo da zadani identitet $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ vrijedi za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Primjer 6.2

Dokažimo da vrijedi nejednakost $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$ za svaki $n\in\mathbb{N}$, $n>1$.

Rješenje:

Za svaki $n\in\mathbb{N}$ je $\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+n}$ n-ti član zbroja u lijevoj strani zadane nejednakosti, stoga se lako dokazuje da zadana nejednakost ne vrijedi za $n=1$, jer $\dfrac{1}{2}\not>\dfrac{13}{24}$.

1. **baza indukcije**: provjeravamo vrijedi li zadana nejednakost za $n = 2$, odnosno vrijedi li da je: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24}$;

uzimajući u obzir da je $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ proizlazi nejednakost: $\frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ koja vrijedi, jer je $\underbrace{7 \cdot 24}_{=168} > \underbrace{13 \cdot 12}_{=156}$ ■

2. **pretpostavka indukcije**:

pretpostavljamo da zadana nejednakost vrijedi za $n = k,\ k \geq 2$:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

3. **korak indukcije**: provjeravamo vrijedi li zadana nejednakost i za $n = k+1,\ k \geq 2$:

$$\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \frac{1}{(k+1)+3} + \cdots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24} \tag{6}$$

- primijetimo da je lijeva strana nejednakosti (6) oblika:

$$\begin{aligned} L &\equiv \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \frac{1}{(k+1)+3} + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{(k+1)+(k-1)} + \frac{1}{(k+1)+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} \\ &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \end{aligned}$$

pa dodatnim raspisivanjem proizlazi:

$$\begin{aligned} L &\equiv \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \cdots + \frac{1}{2k}\right)}_{>\frac{13}{24} \quad \text{(primjenom pretpostavke indukcije)}} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{13}{24} + \frac{2k+2+2k+1-4k-2}{2(k+1)(2k+1)} \\ &> \frac{13}{24} + \underbrace{\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}}_{>0 \quad \text{za svaki } k \in \mathbb{N}} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$ ■

Zaključujemo da zadana nejednakost $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N},\ n > 1$.

Primjer 6.3

Dokažimo da vrijedi $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (čitamo: 3 dijeli $5^n + 2^{n+1}$)

Rješenje:

Uočimo: $3 \mid (5^n + 2^{n+1}) \quad \Leftrightarrow \quad 5^n + 2^{n+1} = 3 \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$

1. **baza indukcije**: provjeravamo za $n = 1$:

$$3 \mid (5 + 2^2) \quad \Rightarrow \quad 3 \mid 9 \qquad \text{jer je} \quad 9 = 3 \cdot 3 \ \ (m = 3) \qquad \blacksquare$$

2. **pretpostavka indukcije**: pretpostavljamo da vrijedi za $n = k$:

$$3 \mid (5^k + 2^{k+1}) \quad \text{ili ekvivalentno} \quad 5^k + 2^{k+1} = 3 \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

3. **korak indukcije**: provjeravamo za $n = k + 1$:

$$3 \mid (5^{k+1} + 2^{k+2}) \quad \text{ili ekvivalentno} \quad 5^{k+1} + 2^{k+2} = 3 \cdot p, \quad p \in \mathbb{N}$$

- primjenom pretpostavke indukcije, dobivamo:

$$\begin{aligned}
L \equiv \ 5^{k+1} + 2^{k+2} &= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} \\
&= 5 \cdot 5^k + 2 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} \\
&= 5 \cdot 5^k + 5 \cdot 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k+1} \\
&= 5 \cdot (5^k + 2^{k+1}) - 3 \cdot 2^{k+1} \\
&= 5 \cdot 3 \cdot m - 3 \cdot 2^{k+1} \\
&= 3 \cdot \underbrace{(\underbrace{5 \cdot m}_{\in \mathbb{N}} - \underbrace{2^{k+1}}_{\in \mathbb{N} \text{ jer je } k \in \mathbb{N}})}_{= p \in \mathbb{N} \quad \text{(ako je } m > k)} \\
&= 3 \cdot p, \quad p \in \mathbb{N} \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Zaključujemo da vrijedi $3 \mid (5^{k+1} + 2^{k+2})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

6.1 Uređaj na skupu $\mathbb{N}$

Definicija skupa prirodnih brojeva zasniva se na Peanovim aksiomima iz kojih proizlazi:

- jedan je najmanji prirodan broj,
- za svaki prirodan broj n postoji njegov jedinstveni (direktni) sljedbenik, koji je za jedan veći od n,
- ne postoji najveći prirodan broj.

Podsjetimo se da je $(\mathbb{N}, \leq)$ potpuno uređeni skup.

Dakle, za svaka dva prirodna broja $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $n \leq m$ ili $m \leq n$.

U nastavku ćemo definirati zbrajanje, množenje, oduzimanje i dijeljenje prirodnih brojeva. Pritom treba naglasiti da je zbroj i umnožak bilo koja dva prirodna broja također prirodan broj. S druge strane, razlika i kvocijent bilo koja dva prirodna broja ne mora biti prirodan broj.

Definicija 6.4 [Zbrajanje u skupu $\mathbb{N}$]

Zbrajanje prirodnih brojeva je realna funkcija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (a, b) \mapsto a + b$

koja svakom paru $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pridružuje prirodan broj $(a + b) \in \mathbb{N}$ i naziva se **suma ili zbroj prirodnih brojeva** a i b.

Propozicija 6.5

Za zbrajanje prirodnih brojeva vrijede sljedeća svojstva:

1. *svojstvo zatvorenosti:* *ako su* $a, b \in \mathbb{N}$, *onda je i* $a + b \in \mathbb{N}$
2. *svojstvo komutativnosti:* $(\forall\, a, b \in \mathbb{N}) \quad a + b = b + a$
3. *svojstvo asocijativnosti:* $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}) \quad a + (b + c) = (a + b) + c$
4. *svojstvo reduciranja:* $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}) \quad a + c = b + c \;\Rightarrow\; a = b$

Definicija 6.6 [Množenje u skupu $\mathbb{N}$]

Množenje prirodnih brojeva je realna funkcija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (a, b) \mapsto a \cdot b$

koja svakom paru $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pridružuje prirodan broj $(a \cdot b) \in \mathbb{N}$ i naziva se **umnožak ili produkt prirodnih brojeva** a i b.

Propozicija 6.7

Za množenje prirodnih brojeva vrijede sljedeća svojstva:

1. *svojstvo zatvorenosti:* *ako su* $a, b \in \mathbb{N}$, *onda je i* $a \cdot b \in \mathbb{N}$
2. *svojstvo komutativnosti:* $(\forall\, a, b \in \mathbb{N}) \quad a \cdot b = b \cdot a$
3. *svojstvo asocijativnosti:* $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}) \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4. *svojstvo reduciranja:* $(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}) \quad a \cdot c = b \cdot c \;\Rightarrow\; a = b$
5. *svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju:*
$$(\forall\, a, b, c \in \mathbb{N}) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Komentar:

- ◎ U skupu prirodnih brojeva ne postoji neutralni element u odnosu na operaciju zbrajanja, jer nula nije prirodan broj.

- Jedan je jedinstveni neutralni element (e) u odnosu na operaciju množenja u skupu $\mathbb{N}$.

  Dakle, $\quad (\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists e \in \mathbb{N}) \qquad (e \cdot n = n \cdot e = n) \quad \Leftrightarrow \quad e = 1.$

- Skup prirodnih brojeva je zatvoren u odnosu na zbrajanje i množenje prirodnih brojeva, jer zbroj i umnožak bilo koja dva prirodna broja je prirodan broj.

- Skup prirodnih brojeva nije zatvoren u odnosu na oduzimanje prirodnih brojeva, jer za bilo koja dva prirodna broja a i b ne mora se dobiti da je $a - b$ prirodan broj.
  Konkretno: $2, 5 \in \mathbb{N}$, ali $(2 - 5) \notin \mathbb{N}$.

  Analogno, skup prirodnih brojeva nije zatvoren u odnosu na dijeljenje prirodnih brojeva, jer za bilo koja dva prirodna broja a i b ne mora se dobiti da je $\frac{a}{b}$ prirodan broj.

  Konkretno: $2, 5 \in \mathbb{N}$, ali $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$.

Definicija 6.8 [Oduzimanje u skupu $\mathbb{N}$]

Neka su a i b bilo koja dva prirodna broja. Tada vrijedi:

$$(a - b) \in \mathbb{N} \quad \text{ako i samo ako postoji} \quad d \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad a = b + d.$$

Broj $d \in \mathbb{N}$ naziva se **razlika ili diferencija prirodnih brojeva** a i b.

Definicija 6.9 [Dijeljenje u skupu $\mathbb{N}$]

Neka su a i b bilo koja dva prirodna broja. Tada vrijedi:

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{N} \quad \text{ako i samo ako postoji} \quad q \in \mathbb{N} \quad \text{takav da je} \quad a = b \cdot q.$$

Broj $q \in \mathbb{N}$ naziva se **kvocijent ili količnik prirodnih brojeva** a i b.

Definicija 6.10

Kažemo da je prirodan broj $a \in \mathbb{N}$ **djeljiv s** prirodnim brojem $b \in \mathbb{N}$ ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $a = b \cdot c$.

Pritom pišemo: $\quad c = \frac{a}{b} \quad$ (ili $c = a : b$) i kažemo da je a **višekratnik od** b i da je b **djelitelj (divizor) od** a (ili da b dijeli a i zapisujemo: $b \mid a$).

Definicija 6.11

Prirodan broj veći od 1 koji je djeljiv samo s jedan i sa samim sobom naziva se **prostim (ili prim) brojem**.

Složen broj je prirodan broj veći od 1 koji nije prost broj.

Iz definicije 6.11 proizlazi da je jedan jedini prirodan broj koji nije prost niti složen broj.

Navodimo nekoliko prvih

prostih brojeva: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots$

složenih brojeva: $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24 \dots$

Dakle, najmanji prost broj je 2, a najmanji složen broj je 4.

Navodimo nekoliko važnih tvrdnji (bez dokaza).

Propozicija 6.12

Svaki prirodan broj veći od 1 *djeljiv je s barem jednim prostim brojem.*

Teorem 6.13

Svaki složeni broj može se rastaviti na proste faktore.

Drugim riječima, svaki složeni broj može se prikazati kao umnožak prostih brojeva.

Teorem 6.14

Prostih brojeva ima prebrojivo beskonačno mnogo.

Iz teorema 6.13 i 6.14 direktno proizlazi da i složenih brojeva ima prebrojivo beskonačno mnogo. Pojam prebrojivosti definirati će se u slijedećem poglavlju - Ekvipotentni skupovi).

7 Ekvipotentni skupovi

Konačne skupove možemo intuitivno uspoređivati po broju njihovih elemenata i pritom možemo reći ima li neki skup više ili manje ili jednako elemenata od nekog drugog skupa.
Na prirodan način, nameću se sljedeća pitanja:
kada je neki skup konačan, beskonačan, prebrojiv, neprebrojiv?

S motivacijom nalaženja odgovora na postavljena pitanja najprije će se definirati ekvipotentnost skupova, a potom kardinalni broj skupa.

Definicija 7.1

Kažemo da je **skup** A **ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom** B ili da su skupovi A i B ekvipotentni i pišemo $A \sim B$ ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to B$ sa skupa A na skup B.

Napomena:

Obzirom na definiciju 7.1 proizlazi da je ekvipotentnost dva ili više skupa zapravo jedna relacija među tim skupovima.

Označimo sa S nepraznu familiju skupova. Tada relaciju ekvipotentnosti $\sim$ na skupu S definiramo na sljedeći način:

$$(\forall\, A, B \in S) \qquad A \sim B \quad \text{ako postoji bijekcija } f\colon A \to B.$$

Drugim riječima, relacija $\sim$ (”biti ekvipotentan”) na skupu S je definirana tako da su svaka dva skupa (iz neke neprazne familije skupova) ekvipotentna ako postoji barem jedna bijekcija s jednog na drugi skup.

U nastavku ćemo pokazati da je ekvipotentnost skupova ujedno relacija ekvivalencije na skupu S (nepraznoj familiji skupova).

Propozicija 7.2

Relacija $\sim$ (*”biti ekvipotentan”*) *je relacija ekvivalencije na skupu* S.

Dokaz:

Uzimajući u obzir da skup S označava nepraznu familiju svih skupova, a $\sim$ binarnu relaciju (”biti ekvipotentan”) na S, primjenom definicije 4.11 proizlazi da će relacija $\sim$ biti relacija ekvivalencije na skupu S ako dokažemo da je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna na skupu S.

- refleksivnost: za svaki $A \in S$ treba dokazati: $A \sim A$,

  uočimo da za svaki skup $A \in S$ postoji bijekcija $f\colon A \to A$ sa skupa A na skup A takva da je $f(x) = x$ za svaki $x \in A$ (identiteta na skupu A), stoga primjenom definicije 7.1 proizlazi da je skup A ekvipotentan sa samim sobom;

- simetričnost: $(\forall\, A, B \in S) \qquad A \sim B \;\;\Rightarrow\;\; B \sim A$,

  iz pretpostavke da su A i B ekvipotentni skupovi, primjenom definicije 7.1 direktno proizlazi da postoji bijekcija $f\colon A \to B$ sa skupa A na skup B $(A, B \in S)$;

  nadalje, iz činjenice da je f bijekcija, primjenom propozicije 5.25, proizlazi da postoji inverzna funkcija $f^{-1}\colon B \to A$ funkcije f koja je također bijekcija, što ima za posljedicu da je skup B ekvipotentan sa skupom A;

- tranzitivnost: $(\forall\, A, B, C \in S) \qquad (A \sim B \,\wedge\, B \sim C) \;\;\Rightarrow\;\; A \sim C$,

  iz pretpostavke da su A i B ekvipotentni skupovi i da su B i C ekvipotentni skupovi, treba dokazati da su A i C ekvipotentni skupovi za svaki $A, B, C \in S$.

  Dakle, iz pretpostavke da su A i B ekvipotentni skupovi proizlazi da postoji bijekcija $f\colon A \to B$ sa skupa A na skup B, pri čemu je $Im\, f = B$.
  Analogno, iz pretpostavke da su B i C ekvipotentni skupovi proizlazi da postoji bijekcija $g\colon B \to C$ sa skupa B na skup C.

  Primjenom definicije 5.17 proizlazi da je definirana kompozicija funkcija f i g u oznaci $g \circ f\colon A \to C$ sa skupa A na skup C koja je ujedno bijekcija (vidi propoziciju 5.24). Time je skup A ekvipotentan sa skupom C.

Dakle, relacija $\sim$ ("biti ekvipotentan") na skupu S je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija na S, stoga je ona ujedno i relacija ekvivalencije na skupu S.

Definicija 7.3

Neka je A bilo koji proizvoljan neprazan skup. Kažemo da je skup A **konačan** ako postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\},$$

gdje $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$ označava skup prvih n prirodnih brojeva.

Broj n nazivamo **kardinalnim brojem skupa** A i označavamo ga s $|A|$ te kažemo da skup A ima n elemenata.

Napomena:

U različitim literaturama kardinalni broj skupa A (tj. kardinalnost skupa A) označava se oznakama:

$$|A|; \;\; k(A); \;\; Card(A); \;\; card(A); \;\; \sharp(A).$$

U nastavku će se za kardinalni broj skupa A koristiti oznaka $|A|$.

Dakle, za neki skup A kažemo da je konačan ako postoji prirodan broj n takav da je skup A ekvipotentan sa skupom prvih n prirodnih brojeva. Drugim riječima, primjenom definicije 7.1, skup A je konačan ako postoji barem jedna bijekcija

$$f\colon A \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

sa skupa A na skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ prvih n prirodnih brojeva.

Uočimo da skup A možemo pisati u obliku $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, pri čemu je

$$f\colon \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

bijekcija takva da je $f(a_k) = k$ za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$, stoga kažemo da skup A ima n elemenata i pišemo $|A| = n$.

Definicija 7.4

Prazan skup $\emptyset$ smatramo konačnim skupom s kardinalnim brojem 0 i pišemo $|\emptyset| = 0$.

Primjer 7.5

Skup $B = \{a, b, c, d\}$ je konačan skup s kardinalnim brojem 4 i pišemo $|B| = 4$.

Dakle, skup B sastoji se od četiri elemenata.

Primijetimo da je skup $B = \{a, b, c, d\}$ ekvipotentan sa skupom $\{1, 2, 3, 4\}$ prva četiri prirodna broja i pišemo:

$$B \sim \{1, 2, 3, 4\},$$

jer postoji bijekcija $f\colon B \to \{1, 2, 3, 4\}$.

Navedimo da se jedna bijekcija $f\colon B \to \{1, 2, 3, 4\}$ može definirati s:

$$f(a) = 2,\ f(b) = 4,\ f(c) = 1,\ f(d) = 3.$$

Naravno, to nije jedina bijekcija!

Ponovimo, za konačan skup A i prirodan broj n vrijedi:

- $|A| = n$ ako i samo ako je skup A ekvipotentan sa skupom prvih n prirodnih brojeva.
- $|A| = 0$ ako i samo ako je skup $A = \emptyset$.

Definicija 7.6

Za skupove A i B kažemo da imaju **isti kardinalni broj** i pišemo $|A| = |B|$ ako su A i B ekvipotentni skupovi.

Drugim riječima, dva skupa imaju isti kardinalni broj ako postoji bijekcija s jednog skupa na drugi skup.

Primjer 7.7

Neka su zadani skupovi $A = \{1, 5, 8, 11, 12\}$ i $B = \{a, c, d\}$.

Uočimo da zadani skupovi A i B nisu ekvipotentni, jer ne postoji bijekcija sa skupa A na skup B, ni bijekcija sa skupa B na skup A. Time je: $|A| \neq |B|$.

S druge strane, postoji bijekcija sa skupa A na skup $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ prvih pet prirodnih brojeva, stoga je: $|A| = 5$ i analogno, postoji bijekcija sa skupa B na skup $\{1, 2, 3\}$ prva tri prirodna broja, stoga je: $|B| = 3$.

Nadalje, iz $5 \neq 3$ proizlazi da skupovi A i B nemaju jednaki broj elemenata, odnosno nemaju isti kardinalni broj, stoga oni nisu ekvipotentni skupovi.
Očito je da skup A ima više elemenata od skupa B.

Primjer 7.8

1. Skup $A = \{0, 1, 2\}$ je ekvipotentan sa skupom $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Uočimo da postoji bijekcija $f\colon A \to B$ takva da je:

   $$f(0) = \emptyset, \quad f(1) = \{\emptyset\}, \quad f(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

   Jasno, to nije jedina bijekcija sa skupa A na skup B.

2. Skupovi $A = \{0, 1\}$ i $B = \{-1, 0, 1\}$ nisu ekvipotentni, jer nemaju isti kardinalni broj, što ima za posljedicu da ne postoji bijekcija sa skupa A na skup B, niti bijekcija sa skupa B na skup A.

3. Neka je zadan skup prirodnih brojeva $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$ i skup parnih prirodnih brojeva $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, 2n+2, \ldots\}$.

   Jesi li skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_p$ ekvipotentni? Koji od navedenih skupova ima više elemenata?

   Primijetimo da postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_p$ definirana s

   $$f(n) = 2n, \qquad \text{za svaki } n \in \mathbb{N},$$

   odakle proizlazi da je $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_p$, što se interpretira da je svakom prirodnom broju n pridružen točno jedan paran prirodan broj $2n$.

   Vrijedi i obrat: svakom parnom prirodnom broju $2n$ pridružen je točno jedan prirodan broj n, jer postoji bijekcija $g\colon \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}$ definirana s: $g(m) = \frac{1}{2}m$ za svaki $m \in \mathbb{N}_p$.

   Pritom je: $g = f^{-1}$ i $f = g^{-1}$.

   Nadalje, iz ekvipotentnosti skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_p$ proizlazi da skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_p$ imaju isti kardinalni broj, što povlači da skupovi $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_p$ imaju jednak broj elemenata.

   Uočimo da su svi parni prirodni brojevi višekratnici broja 2, stoga skup $\mathbb{N}_p$ češće označavamo s $2\,\mathbb{N}$, vidi zadatak 7.23.

4. Neka je $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, 2n+2, \ldots\}$ skup parnih prirodnih brojeva i
   $\mathbb{N}_n = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2n+1, \ldots\}$ skup neparnih prirodnih brojeva.

   Dokažite da su $\mathbb{N}_p$ i $\mathbb{N}_n$ ekvipotentni skupovi.

   Uočimo da postoji bijekcija $f\colon \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}$ definirana s $f(x) = \frac{1}{2}x$ za svaki $x \in \mathbb{N}_p$ i analogno postoji bijekcija $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_n$ definirana s $g(x) = 2x - 1$ za svaki $x \in \mathbb{N}$. Tada primjenom propozicije 5.24 proizlazi da je kompozicija $g \circ f\colon \mathbb{N}_p \to \mathbb{N}_n$ (sa skupa $\mathbb{N}_p$ na skup $\mathbb{N}_n$) bijekcija takva da je:

   $$(g \circ f)(x) = x - 1 \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{N}_p.$$

   Pritom smo koristili definiciju kompozicije funkcija f i g:

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\tfrac{1}{2}x) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}x - 1 = x - 1.$$

   Time dobivamo da su $\mathbb{N}_p$ i $\mathbb{N}_n$ ekvipotentni skupovi i pišemo: $\mathbb{N}_p \sim \mathbb{N}_n$.

Definicija 7.9

Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva naziva se **alef nula** (prema prvom slovu ℵ ”alef” hebrejskog pisma) i označava s $\aleph_0$, stoga pišemo:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Definicija 7.10

Za skup kažemo da je **beskonačan skup** ako on nije nije konačan.

Razlikujemo dva osnovna tipa beskonačnih skupova: prebrojivo beskonačne skupove i neprebrojivo beskonačne skupove koje ćemo u nastavku definirati.

Definicija 7.11

Za skup A kažemo da je **prebrojivo beskonačan skup** ako je $A \sim \mathbb{N}$.
Pritom je: $|A| = \aleph_0$.

Drugim riječima, skup A je prebrojivo beskonačan skup ako je on ekvipotentan sa skupom prirodnih brojeva, odnosno ako postoji bijekcija $f\colon A \to \mathbb{N}$ sa skupa A na skup prirodnih brojeva.
Jasno, pritom je kardinalni broj skupa A jednak kardinalnom broju skupa prirodnih brojeva.

Propozicija 7.12

Skup prirodnih brojeva je prebrojivo beskonačan skup.

Dokaz:

Primijetimo da je identiteta na skupu prirodnih brojeva

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = n \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}$$

zapravo bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ na skup $\mathbb{N}$, stoga skup prirodnih brojeva je ekvipotentan sa samim sobom, odakle proizlazi da je skup $\mathbb{N}$ prebrojivo beskonačan skup.

Primjer 7.13

Dokažite da vrijedi: $|\mathbb{N}_p| = |\mathbb{N}_n| = \aleph_0$,

gdje $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \dots, 2n, 2n+2, \dots\}$ označava skup parnih prirodnih brojeva, a
$\mathbb{N}_n = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, 2n+1, \dots\}$ skup neparnih prirodnih brojeva
(vidi oznake 3. i 4. u primjeru 7.8).

Definicija 7.14

Za skup koji je konačan ili prebrojivo beskonačan kažemo da je **prebrojiv skup**.

Podsjetimo se, za svaki konačan skup osim za prazan skup postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|A| = n,$ što se interpretira da skup A ima n elemenata.

Međutim, treba razlikovati prebrojivo konačan od prebrojivo beskonačnog skupa. Primijetimo da oni nisu ekvipotentni skupovi, jer ne postoji bijekcija s prebrojivo konačnog skupa na prebrojivo beskonačan skup.
Drugim riječima, ne postoji bijekcija sa skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ na skup prirodnih brojeva za nijedan prirodan broj n, jer je: $n \neq \aleph_0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 7.15

Za skup koji nije prebrojiv kažemo da je **neprebrojivo beskonačan skup** ili kraće **neprebrojiv skup**.

Komentar:

Pokazuje se da vrijede slijedeće tvrdnje:

- Skup realnih brojeva je neprebrojiv skup.

  Drugim riječima, skup $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$, stoga skup $\mathbb{R}$ nije prebrojivo beskonačan skup, već je neprebrojivo beskonačan skup.

  Analogno, skup $\mathbb{I}$ iracionalnih brojeva kao i skup $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva, primjeri su neprebrojivih (beskonačnih) skupova.

- Skup cijelih brojeva i skup racionalnih brojeva su prebrojivo beskonačni skupovi i vrijedi:
$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Definicija 7.16

Kardinalni broj skupa realnih brojeva označavamo s c, nazivamo ga **kontinuum** i pišemo:
$$|\mathbb{R}| = c.$$
Kardinalne brojeve beskonačnih skupova nazivamo **transfinitnim brojevima**.

Komentar:

Alef nula i kontinuum primjeri su transfinitnih brojeva; međutim, to nisu jedini transfinitni brojevi.

Pokazuje se da vrijede sljedeće tvrdnje:

◇ postoji beskonačno mnogo različitih transfinitnih brojeva;

◇ ne postoji najveći transfinitni broj;

◇ alef nula je najmanji od svih transfinitnih brojeva;

◇ $\aleph_0 < c,$ gdje je: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|,\ c = |\mathbb{R}|;$

◇ hipoteza kontinuuma: ne postoji beskonačan skup S takav da je $\aleph_0 < |S| < c$.

Drugim riječima, ne postoji beskonačan skup kojemu je kardinalni broj između kardinalnog broja skupa prirodnih brojeva i kardinalnog broja skupa realnih brojeva.

Kardinalne brojeve bilo koja dva skupa A i B možemo uspoređivati na sljedeći način:

$$|A| = |B|, \quad |A| \leq |B|, \quad |A| < |B| \quad \text{(ili analogno} \quad |A| \geq |B|,\ |A| > |B|).$$

Kažemo da je $|A| \leq |B|$ (i čitamo kardinalni broj skupa A je manji ili jednak od kardinalnog broja skupa B) ako postoji injekcija (tj. injektivno preslikavanje) $f\colon A \to B$ sa skupa A u skup B.

Jasno, pritom je: $Im\, f \subseteq B$ (područje vrijednosti funkcije f je podskup skupa B).

Drugim riječima, vrijedi da je $|A| \leq |B|$ ako je skup A ekvipotentan sa skupom $Im\, f \subseteq B$.

Pritom razlikujemo sljedeća dva slučaja.

1. Ako je $Im\, f \subset B$, onda injekcija $f\colon A \to B$ nije ujedno i surjekcija, stoga f nije bijekcija, odakle proizlazi: $|A| < |B|$ (jer A i B nisu ekvipotentni skupovi).
2. Ako je $Im\, f = B$, onda injekcija $f\colon A \to B$ je ujedno i surjekcija pa je f bijekcija, stoga su A i B ekvipotentni skupovi pa je: $|A| = |B|$.

U posebnom slučaju, ako su A i B konačni skupovi, onda $|A| \leq |B|$ izražava uobičajen odnos $\leq$ (manje ili jednako) između broja elemenata skupa A i broja elemenata skupa B.

Navodimo sljedeće važne teoreme (bez dokaza) iz teorije skupova.

Teorem 7.17 (Schröder − Bernstein)

Neka su A i B skupovi takvi da je $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$. Tada je $|A| = |B|$.

Navedena tvrdnja $Schröder - Bernsteinovog\ teorema$ lako se može dokazati ako su A i B konačni skupovi. Međutim, za beskonačne skupove A i B dokaz nije jednostavan.

Teorem 7.18 (Cantor)

Skup realnih brojeva je neprebrojiv.

Drugim riječima, skup $\mathbb{R}$ nije ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$ i vrijedi: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$, odnosno: $\aleph_0 < c$.

Teorem 7.19 (Cantor)

Za svaki skup A vrijedi $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, gdje $\mathcal{P}(A)$ označava partitivni skup skupa A.

Pritom je: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$, gdje je $|A|$ kardinalni broj skupa A.

Teorem 7.20

Svaki beskonačan podskup prebrojivo beskonačnog skupa je prebrojivo beskonačan skup.

Svaki beskonačan podskup prebrojivo beskonačnog skupa je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$.

Dakle, svaki beskonačan podskup prebrojivo beskonačnog skupa može se bijektivno preslikati na skup prirodnih brojeva.

Skup A je prebrojivo beskonačan ako i samo ako postoji injektivno preslikavanje $f\colon A \to \mathbb{N}$ takvo da je $Im\, f$ beskonačan podskup skupa $\mathbb{N}$.

Primjer 7.21

Navedimo nekoliko beskonačanih podskupova skupa $\mathbb{N}$ koji su ekvipotentni sa skupom $\mathbb{N}$:

- svi parni prirodni brojevi (tj. svi prirodni brojevi djeljivi s 2),
- svi neparni prirodni brojevi,
- svi prirodni brojevi djeljivi s n, gdje je $n \in \mathbb{N}$,
- sve prirodne potencije bilo kojeg prirodnog broja,

  konkretno sve prirodne potencije broja 3 dane su preslikavanjem:

  $f(n) = 3^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, gdje je $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- svi prosti prirodni brojevi, $\ldots$

Svaki od navedenih skupova može se bijektivno preslikati na skup prirodnih brojeva.

Teorem 7.22

Skupovi cijelih brojeva i racionalnih brojeva su prebrojivo beskonačni skupovi.

Posljedica teorema je da vrijedi: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, gdje je: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Dokaz:

(i) Dokažimo najprije da je skup cijelih brojeva prebrojivo beskonačan skup.

Dakle, treba naći bijekciju sa skupa $\mathbb{Z}$ na skup $\mathbb{N}$.

Primijetimo da skup svih pozitivnih cijelih brojeva možemo bijektivno preslikati na skup svih parnih prirodnih brojeva i analogno, nulu i skup svih negativnih cijelih brojeva možemo bijektivno preslikati na skup svih neparnih prirodnih brojeva:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \end{array}$$

Time postoji bijekcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ takva da je:

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{ako je} \quad k > 0, \\ 2|k| + 1 & \text{ako je} \quad k \leq 0 \end{cases}$$

pa je $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, odnosno $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

(ii) Dokažimo sada da je skup racionalnih brojeva prebrojivo beskonačan skup.

Pretpostavimo da vrijede sljedeće dvije pretpostavke:

1. Svaki racionalan broj $x \in \mathbb{Q}$ određen je predznakom $p = 1$ ili $p = -1$, brojnikom $n \in \mathbb{N}_0$ (gdje je: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) i nazivnikom $m \in \mathbb{N}$, stoga pišemo:
$$x = p \cdot \frac{n}{m} \qquad \text{za svaki } x \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N},\ p = 1 \text{ ili } p = -1.$$
2. Brojnik n i nazivnik m racionalnog broja x su relativno prosti brojevi. Drugim riječima, pretpostavljamo da je najveća zajednička mjera brojnika n i nazivnika m (racionalnog broja x) jednaka jedan i pišemo: $M(n, m) = 1$.

Nadalje, definiramo preslikavanje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ takvo da je:

$$f\left(p \cdot \frac{n}{m}\right) = 2^{p+1}\, 3^n\, 5^m \quad \text{za svaki } n \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{N},\ p = 1 \text{ ili } p = -1. \tag{7}$$

Uočimo da faktor 2^{p+1} poprima dvije konstantne prirodne vrijednosti i to 4 ako je $p = 1$ ili 1 ako je $p = -1$. S druge strane, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ faktori 3^n (sve prirodne potencije broja 3) i 5^m (sve prirodne potencije broja 5 bez jedinice) tvore beskonačne podskupove skupa prirodnih brojeva. Time produkt $2^{p+1}\, 3^n\, 5^m$ za svaki $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$, $p = 1$ ili $p = -1$ je beskonačan podskup skupa $\mathbb{N}$, stoga je $Im\, f$ beskonačan podskup skupa $\mathbb{N}$.

Dokažimo da je preslikavanje f injekcija.

Za svaka dva racionalna broja $p_1 \cdot \dfrac{n_1}{m_1}, p_2 \cdot \dfrac{n_2}{m_2} \in \mathbb{Q}$, gdje je

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0,\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}$,

$p_1 = 1$ ili $p_1 = -1$ te $p_2 = 1$ ili $p_2 = -1$

pretpostavimo da vrijedi: $f\left(p_1 \cdot \dfrac{n_1}{m_1}\right) = f\left(p_2 \cdot \dfrac{n_2}{m_2}\right)$.

Podsjetimo se, funkcija f je injekcija ako obzirom na pretpostavku $f\left(p_1 \cdot \dfrac{n_1}{m_1}\right) = f\left(p_2 \cdot \dfrac{n_2}{m_2}\right)$ dokažemo da je: $p_1 \cdot \dfrac{n_1}{m_1} = p_2 \cdot \dfrac{n_2}{m_2}$.

Primjenom definicije funkcije f dane izrazom (7), dobivamo:

$$2^{p_1+1}\, 3^{n_1}\, 5^{m_1} = 2^{p_2+1}\, 3^{n_2}\, 5^{m_2},$$

odakle proizlazi da je $2^{p_1+1} = 2^{p_2+1}$, $3^{n_1} = 3^{n_2}$, $5^{m_1} = 5^{m_2}$, odnosno

$$p_1 + 1 = p_2 + 1 \ \Rightarrow\ p_1 = p_2, \qquad n_1 = n_2, \qquad m_1 = m_2. \tag{8}$$

Pritom smo koristili svojstvo jednakosti potencija: ”*dvije potencije su jednake ako imaju jednake baze i jednake eksponente*”.

Primjenom identiteta (8) slijedi da je $p_1 \cdot \dfrac{n_1}{m_1} = p_2 \cdot \dfrac{n_2}{m_2}$, stoga funkcija $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ definirana izrazom (7) je injekcija.

Nadalje, ako definiramo funkciju $g\colon \mathbb{Q} \to Im\, f$, gdje je $Im\, f \subseteq \mathbb{N}$ takvu da je

$$g\left(p \cdot \frac{n}{m}\right) = f\left(p \cdot \frac{n}{m}\right) = 2^{p+1}\, 3^n\, 5^m$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $p = 1$ ili $p = -1$, onda obzirom na prethodno navedeno proizlazi da je funkcija $g\colon \mathbb{Q} \to Im\, f$ surjekcija i injekcija, odnosno bijekcija.

Iz prethodno argumentiranog proizlazi da je $Im\, f$ beskonačan podskup skupa $\mathbb{N}$ i da je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}$. Time postoji barem jedna bijekcija $h\colon Im\, f \to \mathbb{N}$ sa skupa $Im\, f$ na skup $\mathbb{N}$.

Uzimajući u obzir da su funkcije $g\colon \mathbb{Q} \to Im\, f$ i $h\colon Im\, f \to \mathbb{N}$ bijekcije, primjenom definicije 5.17 proizlazi da je definirana kompozicija funkcija g i h, gdje je $f = h \circ g$, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ koja je ujedno bijekcija (vidi propoziciju 5.24), stoga je $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, odnosno $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Time je dokazano: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Komentar:

Pokazuje se da vrijede sljedeće tvrdnje:

1. $[0, 1] \sim [a, b]$.
   Preslikavanje $f\colon [0, 1] \to [a, b]$, $f(x) = (b - a)x + a$ za svaki $x \in [0, 1]$ je bijekcija.
2. $[a, b] \sim [c, d]$.
   Preslikavanje $f\colon [a, b] \to [c, d]$, $f(x) = \dfrac{d - c}{b - a}(x - a) + c$ za svaki $x \in [a, b]$ je bijekcija.
3. $[0, 1\rangle \sim \langle 0, 1]$.
   Preslikavanje $f\colon [0, 1\rangle \to \langle 0, 1]$, $f(x) = 1 - x$ je bijekcija.

Zadatak 7.23

Dokažite da vrijedi ekvipotentnost sljedećih skupova:

1. $\mathbb{N} \sim 3\,\mathbb{N}$
2. $\mathbb{N}_p \sim \mathbb{N}_n$
3. $\mathbb{N}_p \sim 5\,\mathbb{N}$
4. $\mathbb{N}_n \sim 4\,\mathbb{N}$
5. $3\,\mathbb{N} \sim 5\,\mathbb{N}$
6. $4\,\mathbb{N} \sim 9\,\mathbb{N}$
7. $6\,\mathbb{N} \sim 11\,\mathbb{N}$

Komentar:

Neka je k proizvoljan prirodan broj. Tada $k\,\mathbb{N}$ označava skup svih višekratnika prirodnog broja k. Specijalno za $k = 1$ vrijedi da je $1\,\mathbb{N} = \mathbb{N}$ (svi prirodni brojevi su višekratnici broja 1).

- U nastavku ćemo dokazati da je $\mathbb{N}_p \sim 5\,\mathbb{N}$.

Rješenje:

Podsjetimo se da je $\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $5\,\mathbb{N} = \{5, 10, 15, \ldots, 5n, \ldots\}$.
Za dokaz $\mathbb{N}_p \sim 5\,\mathbb{N}$ treba pokazati da vrijedi: $\mathbb{N}_p \sim \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \sim 5\,\mathbb{N}$.

1. Dokažimo da je $\mathbb{N}_p \sim \mathbb{N}$, odnosno dokažimo da postoji bijekcija

$$f\colon \mathbb{N}_p \to \mathbb{N} \quad \text{takva da je} \quad f(x) = \tfrac{1}{2}\,x \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{N}_p.$$

◇ **surjektivnost**: $(\forall\, y \in \mathbb{N})\ (\exists\, x \in \mathbb{N}_p)$ takav da je $y = f(x)$

$$y = \frac{1}{2}\,x \quad \Rightarrow \quad x = 2y \qquad \text{(vrijedi)}$$

◇ **injektivnost**: $(\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{N}_p)\quad f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$

$$\frac{1}{2}\,x_1 = \frac{1}{2}\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \qquad \text{(vrijedi)}$$

Time smo dokazali da je funkcija f bijekcija.

2. Dokažimo da je $\mathbb{N} \sim 5\,\mathbb{N}$, odnosno dokažimo da postoji bijekcija

$$g\colon \mathbb{N} \to 5\,\mathbb{N} \quad \text{takva da je} \quad g(x) = 5x \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathbb{N}.$$

◇ **surjektivnost**: $(\forall\, y \in 5\,\mathbb{N})\ (\exists\, x \in \mathbb{N})$ takav da je $y = g(x)$

$$y = 5x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{5}\,y \qquad \text{(vrijedi)}$$

◇ **injektivnost**: $(\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{N})\quad g(x_1) = g(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$

$$5x_1 = 5x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 \qquad \text{(vrijedi)}$$

Time smo dokazali da je funkcija g bijekcija.

Primjenom propozicije 5.24 proizlazi da je kompozicija $g \circ f\colon \mathbb{N}_p \to 5\,\mathbb{N}$ bijekcija pri čemu je:

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{2}\,x\right) = \frac{5}{2}\,x \qquad \text{za svaki} \ \ x \in \mathbb{N}.$$

8 Matrice i determinante

U matematici se pod pojmom matrice smatra "*pravokutna tablica*" sačinjena od konačno mnogo redaka i stupaca na čijim se presjecima nalaze elementi - najčešće realni ili kompleksni brojevi ili neki drugi objekti kao što su funkcije, vektori, diferencijalni operatori ili matrice.
U nastavku će se promatrati matrice realnih brojeva, odnosno matrice čiji su elementi realni brojevi. Standardne oznake matrica su velika masno otisnuta slova $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \ldots$. Elemente matrice označavamo malim slovima indeksiranim s dva indeksa i, j, gdje prvi indeks i označava poziciju retka, a drugi indeks j poziciju stupca na kojoj se nalazi element u matrici. Navedimo da matrice imaju veliku primjenu u linearnoj algebri i da se zbog njihovog značaja u matematici zasebno razvila teorija matrica.

Determinante je prvi uveo Gottfried Wilhelm Leibniz (1693. g.) pri ispitivanju rješenja sustava linearnih jednadžbi. Međutim, u to se vrijeme nije pridavala odgovarajuća važnost ni zasluga njegovom postignuću koje biva zaboravljeno sve do 1750. godine. Tada je Gabriel Cramer prvi dao pravila za rješavanje sustava linearnih jednadžbi pomoću determinanti, stoga se dugo vremena smatralo da je on ujedno i prvi uveo determinante. Navedimo da je Carl Friedrich Gauss prvi upotrijebio naziv determinanta i da se tek poslije radova Carla Gustava Jacobija determinante počinju široko primjenjivati u matematici. Determinante imaju osobito važnu ulogu u teoriji matrica (npr. u ispitivanju regularnosti kvadratne matrice), što će detaljnije biti objašnjeno.

8.1 Definicija i tipovi matrica

Definicija 8.1

Neka su m i n proizvoljni prirodni brojevi. Kažemo da je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica tipa $m \times n$ i pišemo: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Matrica $\mathbf{A}$ sastoji se od m redaka i n stupaca $(m, n \in \mathbb{N})$ i elemenata a_{ij} za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, pri čemu se svaki element a_{ij} matrice $\mathbf{A}$ nalazi na presjeku njezinog i - tog retka i j - tog stupca.

Kažemo da elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ čine i-ti redak matrice $\mathbf{A}$ i da elementi $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ čine j-ti stupac matrice $\mathbf{A}$.

U okviru ovog kolegija proučavat će se realne matrice tipa $m \times n$, odnosno matrice čiji su elementi $a_{ij} \in \mathbb{R}$ realni brojevi za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, gdje su m i n proizvoljni prirodni brojevi.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ označava se s $\mathcal{M}_{mn}$, gdje m i n mogu biti međusobno različiti ili jednaki prirodni brojevi.
Ako je $m \neq n$, onda kažemo da je $\mathbf{A}$ matrica tipa $m \times n$, a ako je $m = n$, onda kažemo da je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n.

Definicija 8.2

Za matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ tipa $1 \times n$ kažemo da je **retčana matrica**.

Za matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ tipa $m \times 1$ kažemo da je **stupčana matrica**.

Primjer 8.3

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -3 & \frac{2}{3} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

je primjer jedne retčane matrice tipa 1×4, a

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

je primjer jedne stupčane matrice tipa 3×1.
Dakle, retčana matrica se sastoji od samo jednog retka, dok se stupčana matrica sastoji od samo jednog stupca. Uobičajeno je da se retčane i stupčane matrice nazivaju vektorima.

Definicija 8.4 [Nul-matrica]

Matrica kojoj su svi elementi jednaki nuli naziva se **nul-matrica** i najčešće označava s $\mathbf{O}$.

Primjer 8.5

Primjeri nul-matrica:

$$[0], \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Definicija 8.6 [Jednakost matrica]

Za matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ kažemo da su **jednake** i pišemo $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ako i samo ako su **matrice A i B istog tipa** i ako vrijedi:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{za svaki} \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

(svi elementi na istim pozicijama su međusobno jednaki).

Primjer 8.7

Neka su zadane matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3\,i & -7 & 2 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3\,i & 0 \\ -7 & -\dfrac{3}{2} \\ 2 & -\pi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3\,i & -7 & 2 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & \pi \end{bmatrix}.$$

Ispitajmo vrijede li sljedeće jednakosti

(a) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\quad$ (b) $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, $\quad$ (c) $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

Rješenje:

Uočimo da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ matrice tipa 2×3, dok je $\mathbf{B}$ matrica tipa 3×2, stoga je $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ i $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$, jer $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ kao i $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ nisu matrice istog tipa.

S druge strane, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ su matrice istog tipa, ali svi elementi na istim pozicijama matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ nisu jednaki; konkretno: $a_{23} = -\pi,\ c_{23} = \pi,\ a_{23} \neq c_{23}$ (jer je $-\pi \neq \pi$).
Time je $\mathbf{A} \neq \mathbf{C}$.

Definicija 8.8

Za svaku matricu $\mathbf{A}$ definira se **transponirana matrica matrice** $\mathbf{A}$ u oznaci $\mathbf{A}^T$ koja se dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ zamjenom redaka s odgovarajućim stupcima.

Drugim riječima, ako je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onda je matrica $\mathbf{A}^T$ tipa $n \times m$:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dakle, transponirana matrica neke matrice dobiva se tako da se ne mijenjajući poredak elemenata u retcima te matrice

- elementi njezinog prvog retka zapišu na mjesto prvog stupca,
- elementi njezinog drugog retka zapišu na mjesto drugog stupca, . . . ,
- elementi njezinog m-tog retka zapišu na mjesto m-tog stupca.

Iz navedene definicije direktno slijedi:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}.$$

Primjer 8.9

U primjeru 8.7 matrica $\mathbf{A}$ je transponirana matrica matrice $\mathbf{B}$ i analogno matrica $\mathbf{B}$ je transponirana matrica matrice $\mathbf{A}$.

Definicija 8.10

Za matricu kažemo da je **kvadratna matrica reda** n (ili kvadratna matrica n - tog reda) ako je broj njezinih redaka jednak broju njezinih stupaca.
Pritom n označava broj redaka i stupaca te matrice.

Time se kvadratna matrica $\mathbf{A}$ reda n zapisuje u obliku:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ili kraće: $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Specijalno, ako je $n = 1$, onda dobivamo kvadratnu matricu prvog reda $[\, a_{11} \,]$ koja se sastoji od samo jednog elementa a_{11}.
Uobičajeno je da se svaka matrica prvog reda poistovjećuje s njezinim (jedinim) elementom i pišemo: $[\, a_{11} \,] = a_{11}$.
S druge strane, svaki realan (ili kompleksan) broj može se pisati u obliku kvadratne matrice prvog reda.

Definicija 8.11

Za kvadratnu matricu reda n, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kažemo da elementi

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$$

čine njenu **glavnu dijagonalu**, a elementi

$$a_{1\,n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \ldots, a_{n\,1}$$

njenu **sporednu dijagonalu**.

Uobičajeno je da se skup svih kvadratnih matrica reda n označava s $\mathcal{M}_n$.

Definicija 8.12

Za kvadratnu matricu reda n kažemo da je:

- **dijagonalna** ako su svi elementi koji ne leže na glavnoj dijagonali jednaki nuli:
$$a_{ij} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
- **skalarna** ako je ona dijagonalna matrica takva da su joj svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki nekom (realnom) broju λ:
$$a_{ij} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i \neq j, \quad a_{ii} = \lambda, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
- **jedinična** ako je ona skalarna (dijagonalna) matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali:
$$a_{ij} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i \neq j, \quad a_{ii} = 1, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
- **gornja trokutasta** ako su svi njeni elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli:
$$a_{ij} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i > j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n;$$
- **donja trokutasta** ako su svi njeni elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli:
$$a_{ij} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Primjer 8.13

Neka su zadane sljedeće kvadratne matrice reda 4:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 & -8 \\ 0 & 7 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_8 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_9 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada

- ⊚ $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$ su dijagonalne matrice;
- ⊚ $\mathbf{A}_4$ je skalarna matrica;
- ⊚ $\mathbf{A}_5$ je dijagonalna matrica
  (ona nije skalarna jer joj svi elementi na glavnoj dijagonali nisu jednaki);

◎ $\mathbf{A}_6$ je jedinična matrica;

◎ $\mathbf{A}_7$ i $\mathbf{A}_8$ su gornje trokutaste matrice;

◎ $\mathbf{A}_9$ je donja trokutasta matrica.

Primijetimo:

– neki elementi na glavnoj dijagonali dijagonalne matrice mogu biti jednaki nuli; ako su svi elementi na glavnoj dijagonali dijagonalne matrice jednaki nuli, onda je to nul-matrica;

– elementi na glavnoj dijagonali i neki elementi iznad glavne dijagonale gornje trokutaste matrice mogu biti jednaki nuli;

– elementi na glavnoj dijagonali i neki elementi ispod glavne dijagonale donje trokutaste matrice mogu biti jednaki nuli;

– jedinična matrica ne može biti niti jedna matrica tipa $m \times n$ za $m \neq n$.

Standardna oznaka jedinične matrice je **I** i pišemo: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$

Ponekad se za jediničnu matricu reda n koristi i oznaka $\mathbf{I}_n$ i to najčešće ako se istovremeno promatra više jediničnih matrica različitih redova (vidi sljedeći primjer) ili ako se u posebnom slučaju želi naglasiti red jedinične matrice (vidi propozciju 8.32).

Primjer 8.14

Navedimo redom jedinične matrice reda $2, 3, 4$ i 5

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz prethodno navedenog slijedi da je jedinična matrica reda 1 zapravo broj jedan i pišemo:

$$\mathbf{I}_1 = [\,1\,] = 1.$$

Definicija 8.15

Kažemo da je kvadratna matrica **A** reda n

simetrična matrica ako vrijedi: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$,

antisimetrična (ili kososimetrična) **matrica** ako vrijedi: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$,

gdje je $\mathbf{A}^T$ transponirana matrica matrice **A**.

Drugim riječima ako je $\mathbf{A} = [a_{ij}],\ i,j = 1,2,\dots,n$ kvadratna matrica reda n, onda je $\mathbf{A}$ simetrična matrica ako vrijedi:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{za svaki} \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

i $\mathbf{A}$ je antisimetrična matrica ako vrijedi:

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{za svaki} \quad i,j = 1,2,\dots,n.$$

Primijetimo da su svi elementi na glavnoj dijagonali antisimetrične matrice jednaki nuli, jer

$$a_{ii} = -a_{ii} \quad \text{povlači} \quad a_{ii} = 0 \quad \text{za svaki} \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Primjer 8.16

Neka su zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

Tada je $\mathbf{A}$ simetrična matrica, a $\mathbf{B}$ antisimetrična matrica.

Propozicija 8.17

Svaka dijagonalna matrica jednaka je svojoj transponiranoj matrici.

Budući da je skalarna matrica specijalan slučaj dijagonalne matrice i da je jedinična matrica specijalan slučaj skalarne matrice (a time i dijagonalne matrice), iz propozicije 8.17 proizlazi:

- svaka skalarna matrica jednaka je svojoj transponiranoj matrici;
- svaka jedinična matrica jednaka je svojoj transponiranoj matrici.

Koristeći definiciju 8.15 proizlazi da su dijagonalne, skalarne i jedinične matrice ujedno i simetrične matrice (usporediti s matricama $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_6$ iz primjera 8.13). Pokazuje se da vrijedi:

- transponirana matrica gornje trokutaste matrice je donja trokutasta matrica i analogno transponirana matrica donje trokutaste matrice je gornja trokutasta matrica.

Primjer 8.18

Obzirom na gornje trokutaste matrice $\mathbf{A}_7$ i $\mathbf{A}_8$ i donju trokutastu matricu $\mathbf{A}_9$ reda 4 iz primjera 8.13 dobivamo sljedeće odgovarajuće transponirane matrice:

$$\mathbf{A}_7^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 \\ -8 & 2 & -7 & -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_8^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -7 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_9^T = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jasno, pritom su $\mathbf{A}_7^T$ i $\mathbf{A}_8^T$ donje trokutaste, a $\mathbf{A}_9^T$ je gornja trokutasta matrica reda 4.

8.2 Računske operacije s matricama

8.2.1 Zbrajanje matrica

Matrice možemo zbrajati jedino ako su istog tipa ili istog reda.

Definicija 8.19

Zbroj matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ tipa $m \times n$ je matrica $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ tipa $m \times n$, gdje je:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \;\; j = 1, 2, \dots, n$$

i pišemo: $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Drugim riječima, matrice (istog tipa) zbrajamo tako da im zbrojimo elemente na istim pozicijama.

Specijalno, ako je $m = n$, onda su $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ kvadratne matrice reda n.

Primjer 8.20

Primijetimo da matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ iz primjera 8.7 ne možemo zbrojiti jer nisu istog tipa, ali možemo zbrojiti matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$. Pritom dobivamo:

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3\,i & -7 & 2 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\,i & -7 & 2 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,i & -14 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 8.21

Za zbrajanje matrica vrijede sljedeća svojstva:

1. *komutativnost:* $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
2. *asocijativnost:* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,
4. *nul-matrica* $\mathbf{O}$ *je neutral za zbrajanje matrica:* $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Podsjetimo se, svi elementi nul-matrice jednaki su nuli.

8.2.2 Množenje matrice skalarom

Svaku matricu neovisno o njezinom tipu ili redu možemo množiti skalarom (realnim ili kompleksnim brojem). U nastavku će se pod pojmom skalar podrazumijevati proizvoljan realan broj i označavat ćemo ga s λ.

Definicija 8.22

Umnožak matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ tipa $m \times n$ i skalara $\lambda \in \mathbb{R}$ je matrica $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ tipa $m \times n$, gdje je:

$$\boxed{b_{ij} = \lambda\, a_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

i pišemo: $\mathbf{B} = \lambda\, \mathbf{A}$.

Drugim riječima, matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ množimo sa skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da svaki element a_{ij} matrice $\mathbf{A}$ pomnožimo s λ.

Primjer 8.23

Pomnožimo li matricu **A** iz primjera 8.7 skalarom $\lambda = -8$ dobivamo:

$$\begin{aligned} -8\,\mathbf{A} &= -8 \cdot \begin{bmatrix} 3\,i & -7 & 2 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -24\,i & 56 & -16 \\ 0 & 12 & 8\pi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Propozicija 8.24

Za množenje matrice skalarom vrijede sljedeća svojstva:

1. $\lambda\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\,\mathbf{A} + \lambda\,\mathbf{B}$
2. $(\lambda + \mu)\,\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{A} + \mu\,\mathbf{A}$
3. $\lambda\,(\mu\,\mathbf{A}) = (\lambda\,\mu)\,\mathbf{A}$
4. $1\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$
5. $(\lambda\,\mathbf{A})^T = \lambda\,\mathbf{A}^T$

8.2.3 Oduzimanje matrica

Analogno, kao i za zbrajanje matrica, matrice možemo oduzimati jedino ako su istog tipa ili istog reda, a oduzimamo ih tako da im oduzmemo elemente na istim pozicijama.

Dakle, neka su $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ dvije matrice tipa $m \times n$, tada razlika matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ je matrica $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ tipa $m \times n$, gdje je:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n.$$

S druge strane, razliku matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ možemo pisati u obliku zbroja matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ ako matricu $\mathbf{B}$ pomnožimo s -1 i pišemo:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\,\mathbf{B},$$

gdje je

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} = a_{ij} + (-1)\,b_{ij}}$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Primjer 8.25

Matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ iz primjera 8.7 ne možemo oduzeti jer nisu istog tipa, ali možemo oduzeti matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$, pri čemu dobivamo:

$$\mathbf{A}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 3i & -7 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3i & -7 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \pi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3i & -7 & 2 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3i & 7 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\pi \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\mathbf{A}-\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\pi \end{bmatrix}.$$

Za svaku matricu $\mathbf{A}$ vrijedi: $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{O}$,
gdje je $\mathbf{O}$ nul-matrica istog tipa kao i matrica $\mathbf{A}$.

8.2.4 Množenje matrica

Matricu $\mathbf{A}$ možemo pomnožiti matricom $\mathbf{B}$ jedino ako je matrica $\mathbf{A}$ ulančana matricom $\mathbf{B}$.

Definicija 8.26

Kažemo da je **matrica** $\mathbf{A}$ **ulančana matricom** $\mathbf{B}$ ako je broj stupaca matrice $\mathbf{A}$ jednak broju redaka matrice $\mathbf{B}$.

Napomena:

- Svaka matrica tipa $m \times q$ je ulančana matricom tipa $q \times n$.
- Bilo koje dvije kvadratne matrice istog reda su ulančane matrice.
- Općenito bilo koje dvije matrice ne moraju biti ulančane.
- Ako je matrica $\mathbf{A}$ ulančana matricom $\mathbf{B}$, onda ne mora vrijediti da je i matrica $\mathbf{B}$ ulančana matricom $\mathbf{A}$.

Primjer 8.27

Neka su zadane matrice

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada se lako može vidjeti da:

1. matrica $\mathbf{A}$ nije ulančana matricom $\mathbf{B}$ i matrica $\mathbf{B}$ nije ulančana matricom $\mathbf{A}$, jer je matrica $\mathbf{A}$ tipa 2×3 i matrica $\mathbf{B}$ je tipa 2×3;
2. iz činjenice da je $\mathbf{C}$ kvadratna matrica reda 2 i da je $\mathbf{A}$ matrica tipa 2×3, proizlazi da je matrica $\mathbf{C}$ ulančana matricom $\mathbf{A}$, ali matrica $\mathbf{A}$ nije ulančana matricom $\mathbf{C}$;

3. analogno kao u 2. matrica $\mathbf{C}$ je ulančana matricom $\mathbf{B}$, ali matrica $\mathbf{B}$ nije ulančana matricom $\mathbf{C}$, jer je $\mathbf{C}$ kvadratna matrica reda 2, a $\mathbf{B}$ je matrica tipa 2×3.

Time produkti $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BC}$ nisu definirani.

S druge strane, produkti $\mathbf{CA}$ i $\mathbf{CB}$ su definirani - vidi primjer 8.29.

Definicija 8.28

Produkt ulančane matrice $\mathbf{A} = [a_{ik}]$, $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, q$ tipa $m \times q$ matricom $\mathbf{B} = [b_{kj}]$, $k = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, n$ tipa $q \times n$ je matrica $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ tipa $m \times n$ takva da je:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{iq} \cdot b_{qj}}$$

ili kraće $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad$ za svaki $\quad i = 1, 2, \dots, m, \ \ j = 1, 2, \dots, n$

i pišemo: $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Dakle, matricu $\mathbf{A}$ množimo matricom $\mathbf{B}$ tako da zbrojimo produkte elemenata i-tog retka matrice $\mathbf{A}$ s odgovarajućim elementima j-tog stupca matrice $\mathbf{B}$.

Pritom matrica $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ima onoliko redaka koliko ih ima matrica $\mathbf{A}$ i onoliko stupaca koliko ih ima matrica $\mathbf{B}$.

Komentar

Bilo koje dvije kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog reda su ulančane matrice. Time su produkti $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ definirani, ali općenito

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA},$$

što ima za posljedicu da **za množenje matrica ne vrijedi svojstvo komutativnosti**.

Primjer 8.29

Obzirom na zadane matrice u primjeru 8.27 dobivamo da produkti $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC}$ i $\mathbf{BC}$ nisu definirani, ali su definirani produkti $\mathbf{CA}$ i $\mathbf{CB}$, pri čemu je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{CA} &= \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) & 10 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 & 10 \cdot (-2) + (-3) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 0 & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 + 9 & 50 + 0 & -20 - 6 \\ -2 - 3 & -10 + 0 & 4 + 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 19 & 50 & -26 \\ -5 & -10 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{CB} &= \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10\cdot 7 + (-3)\cdot 4 & 10\cdot 0 + (-3)\cdot(-2) & 10\cdot 6 + (-3)\cdot 8 \\ (-2)\cdot 7 + 1\cdot 4 & (-2)\cdot 0 + 1\cdot(-2) & (-2)\cdot 6 + 1\cdot 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 70-12 & 0+6 & 60-24 \\ -14+4 & 0-2 & -12+8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 58 & 6 & 36 \\ -10 & -2 & -4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Primjer 8.30

Neka su zadane matrice $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Ispitajmo jesu li definirani produkti $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$; ako jesu, izračunajmo ih.

Rješenje:

Primijetimo da je matrica $\mathbf{A}_1$ tipa 3×1 i da je matrica $\mathbf{A}_2$ tipa 1×3, stoga je matrica $\mathbf{A}_1$ ulančana matricom $\mathbf{A}_2$ i matrica $\mathbf{A}_2$ ulančana je matricom $\mathbf{A}_1$ pa su produkti $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ definirani. Primjenom definicije produkta matrica, dobivamo:

$$
\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 10 + 18 \end{bmatrix} = [32],
$$

odakle proizlazi da je produkt $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ kvadratna matrica reda 3 te da je produkt $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$ kvadratna matrica reda 1.

Primjerima 8.29 i 8.30 pokazali smo:

- za množenje matrica ne vrijedi svojstvo komutativnosti, tj. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$;
- postoje matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da produkti $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ nisu definirani;
- postoje matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da je produkt $\mathbf{AB}$ definiran, ali produkt $\mathbf{BA}$ nije definiran;
- postoje matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da su produkti $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ definirani, ali da su oni zapravo kvadratne matrice različitih redova.

Uočimo da za kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ istog reda, produkti $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$ su također kvadratne matrice čiji je red jednak redu matrice $\mathbf{A}$ (matrice $\mathbf{B}$), ali općenito $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Konkretno:

$$
\begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 50 \\ -5 & -10 \end{bmatrix},
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -30 & 9 \end{bmatrix}.$$

Komentar:

Postoje matrice različite od nul-matrica takve da im je produkt jednak nul-matrici.

Drugim riječima, ako je $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, onda ne mora vrijediti da je $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ili $\mathbf{B} = \mathbf{O}$, gdje $\mathbf{O}$ označava nul-matricu. Konkretno:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 8.31

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n i $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n. Tada vrijedi:

$$\mathbf{A\,I} = \mathbf{I\,A} = \mathbf{A}.$$

Kažemo da je jedinična matrica neutralni element u odnosu na množenje kvadratnih matrica.

Propozicija 8.32

Za svaku matricu $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$ vrijedi: $\quad \mathbf{I}_m\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$,

gdje $\mathbf{I_m}$ označava jediničnu matricu reda m, a $\mathbf{I_n}$ jediničnu matricu reda n.

Propozicija 8.33

Za množenje matrica vrijede sljedeća svojstva:

1. *asocijativnost:* $\quad (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
2. *distributivnost množenja prema zbrajanju slijeva:* $\quad \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
3. *distributivnost množenja prema zbrajanju zdesna:* $\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
4. $\lambda\,(\mathbf{AB}) = (\lambda\,\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{A}\,(\lambda\,\mathbf{B})$
5. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

Napomenimo da dijeljenje matrica nije definirano - ekvivalent za dijeljenje matrica je množenje matrice nekom ulančanom inverznom matricom, što će se detaljnije obraditi u nastavku.

Prije toga, ukratko ćemo objasniti pojam potencije matrice i matričnog polinoma.

8.3 Potencije matrice i matrični polinom

Potencije matrice su definirane samo za kvadratne matrice.

Definicija 8.34

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ reda n i prirodan broj $p \in \mathbb{N}$ definiramo **potenciju matrice** $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{p \text{ faktora}}.$$

Specijalno: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n.

Propozicija 8.35

Neka je $p, q \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi:

$$\mathbf{A}^p \mathbf{A}^q = \mathbf{A}^q \mathbf{A}^p = \mathbf{A}^{p+q},$$

$$(\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}.$$

Definicija 8.36

Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ reda n i za bilo koji realan polinom stupnja p

$$f(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p-1} x^{p-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

gdje su $\alpha_p, \alpha_{p-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ koeficijenti polinoma, definiramo **matrični polinom**

$$f(\mathbf{A}) = \alpha_p \, \mathbf{A}^p + \alpha_{p-1} \, \mathbf{A}^{p-1} + \cdots + \alpha_1 \, \mathbf{A} + \alpha_0 \, \mathbf{I}. \tag{9}$$

Pritom se u matričnom polinomu (9) primijenilo svojstvo: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica istog reda kao i matrica $\mathbf{A}$.

Primjer 8.37

Odredimo vrijednost matričnih polinoma $f(\mathbf{A})$ i $g(\mathbf{A})$ ako je zadana matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ i polinomi $f(x) = x^2 - 4x + 7$ i $g(x) = x^3 - x - 3$.

Rješenje:

Obzirom na zadanu matricu $\mathbf{A}$ i polinom $f(x) = x^2 - 4x + 7$, dobivamo sljedeći matrični polinom:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 4\,\mathbf{A} + 7\,\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right) - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo:

$$
\begin{aligned}
g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A} - 3\,\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^3 - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ -27 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -24 & -15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

8.4 Determinanta kvadratne matrice

Svakoj kvadratnoj matrici

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}
$$

reda n pridružena je determinanta te matrice koju zapisujemo u obliku $\det \mathbf{A}$ ili $|\mathbf{A}|$ (u nastavku ćemo koristiti oznaku $\det \mathbf{A}$), gdje je

$$
\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{10}
$$

Ako su svi elementi a_{ij} kvadratne matrice $\mathbf{A}$ realni brojevi, onda je $\det \mathbf{A}$ **realan broj** koji se dobiva Laplaceovim razvojem determinante (kvadratne matrice $\mathbf{A}$) po njezinom i-tom retku ili po njezinom j-tom stupcu[4] - vidi propoziciju 8.44 i izraze (14), (15).

U suglasnosti s definicijom 8.11 kažemo da elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ čine **glavnu dijagonalu determinante kvadratne matrice A** i da elementi $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3\,n-2}, \dots, a_{n1}$ čine **sporednu dijagonalu determinante kvadratne matrice A**.

Jasno, red determinante kvadratne matrice $\mathbf{A}$ jednak je redu kvadratne matrice $\mathbf{A}$, stoga induktivno po redu $n \in \mathbb{N}$ kvadratne matrice razlikujemo:

[4]Pritom se determinanta kvadratne matrice reda n izračunava induktivno po determinantama $n-1$-vog reda koje se dalje računaju pomoću determinanti $n-2$-og reda i tako dalje, postupak se nastavlja sve do dobivanja determinanti drugog reda koje su jednake razlici produkta elemenata na glavnoj i sporednoj dijagonali, vidi formulu (11)

determinante prvog reda: $|a_{11}|$,

determinante drugog reda: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

determinante trećeg reda: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

determinante četvrtog reda: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \ldots,$

determinante n-tog reda koje su dane izrazom (10).

Svaka determinanta se sastoji od jednakog broja redaka i stupaca, pri čemu broj redaka (stupaca) determinante određuje njezin red.

Matricama tipa $m \times n$ za $m \neq n$ nije pridružena nijedna determinanta, jer takve matrice imaju različit broj redaka i stupaca. Dakle, determinanta je definirana samo za kvadratne matrice.

U nastavku će se induktivno definirati izračunavanje determinante u ovisnosti o njezinom redu.

8.4.1 Izračunavanje determinanti n-tog reda, $n \in \mathbb{N}$

Definicija 8.38

Determinanta prvog reda jednaka je svom jedinom elementu i pišemo: $|a_{11}| = a_{11}$.

Treba razlikovati determinantu prvog reda od apsolutne vrijednosti realnog (ili kompleksnog) broja, stoga se determinanta prvog reda $|a_{11}|$ zapisuje u obliku a_{11} (bez okomitih crta slijeva i zdesna od a_{11}).

Definicija 8.39

Determinanta drugog reda izračunava se primjenom sljedeće formule:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}. \tag{11}$$

Drugim riječima, determinanta drugog reda jednaka je razlici produkta elemenata na glavnoj i sporednoj dijagonali

Primjer 8.40

Izračunajmo sljedeće determinante drugog reda ako je:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - (-5) \cdot 3 = -8 - (-15) = -8 + 15 = 7$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} -1+2i & 3 \\ 4i & -5i \end{vmatrix} = 5i - 10i^2 - 12i = 10 - 7i$$

$$(c)\quad \begin{vmatrix} -5+2i & 4i \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 30 - 12i - (-12i) = 30 - 12i + 12i = 30$$

$$(d)\quad \begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix} = 2b + ab - (a+ab) = 2b + ab - a - ab = 2b - a$$

$$(e)\quad \begin{vmatrix} \frac{1+a^2}{1-a^2} & \frac{2a}{1-a^2} \\ \frac{2a}{1-a^2} & \frac{1+a^2}{1-a^2} \end{vmatrix} = \frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2} - \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{1+2a^2+a^4-4a^2}{(1-a^2)^2}$$

$$= \frac{1-2a^2+a^4}{(1-a^2)^2} = \frac{(1-a^2)^2}{(1-a^2)^2} = 1$$

Komentar:

U nastavku će se pokazati da se svaka determinanta n-tog reda $(n \geq 2)$ izračunava primjenom **Laplaceovog razvoja** po bilo kojem njezinom retku ili stupcu - vidi propoziciju 8.44. Pritom se izračunavanje determinante n-tog reda svodi na izračunavanje n determinanti $(n-1)$-vog reda, nadalje svaka determinanta $(n-1)$-vog reda svodi se izračunavanje $n-2$ determinanti $(n-2)$-og reda. Postupak se nastavlja sve do dobivanja determinanti trećeg reda, gdje se svaka determinanta trećeg reda svodi na izračunavanje tri determinanti drugog reda od kojih se svaka rješava primjenom formule (11).
Konkretno, za izračun determinante četvrtog reda potrebno je izračunati (najviše) 12 determinanti drugog reda, a za izračun determinante petog reda potrebno je izračunati (najviše) 60 determinanti drugog reda. Općenito, za izračun determinante n-tog reda potrebno je izračunati (najviše) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 3$ determinanti drugog reda, odakle proizlazi složenost i zahtjevnost izračuna determinante n-tog reda za relativno mali proizvoljan prirodan broj n.

◎ Specijalno, **samo determinante trećeg reda**, osim spomenutog Laplaceovog razvoja, mogu se izračunati i primjenom **Sarrusovog pravila**.

Propozicija 8.41 [Sarrusovo pravilo]

Neka je zadana determinanta trećeg reda:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ako determinanti zdesna dopišemo prva dva njezina stupca, onda je determinanta trećeg reda jednaka zbroju produkata elemenata na tzv. glavnim dijagonalama (smjer slijeva na desno) od kojeg se oduzimaju produkti elemenata na tzv. sporednim dijagonalama (smjer zdesna na lijevo). Time je:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - (a_{13}\,a_{22}\,a_{31} + a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{21}\,a_{33}) \\ &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}. \end{aligned}$$

Primjer 8.42

Primjenom Sarrusovog pravila izračunajmo determinante trećeg reda ako je:

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{matrix} = -2+6+10-(3-5+8) = 14-6 = 8$$

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \\ -7 & -5 \end{matrix} = -14-14+10-(-7-35+8) = -18+34 = 16$$

Označimo s

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

determinantu kvadratne matrice **A** reda n, gdje je $n \geq 2$ proizvoljan prirodan broj.

Definicija 8.43

Svaka determinanta M_{ij} $(n-1)$-vog reda koja se dobiva iz determinante D n-tog reda $(n \geq 2)$ izostavljanjem njezinog i-tog retka i j-tog stupca, $1 \leq i, j \leq n$ naziva se **minora (subdeterminanta) elementa** a_{ij} **determinante** D.

Navodimo sljedeću propoziciju bez dokaza.

Propozicija 8.44 [Laplaceov razvoj determinante po njezinom retku ili stupcu]

Laplaceov razvoj determinante D n-tog reda po njezinom i-tom retku $(1 \leq i \leq n)$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij} \\ &= (-1)^{i+1}\, a_{i1}\, M_{i1} + (-1)^{i+2}\, a_{i2}\, M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}\, a_{in}\, M_{in} \qquad (12) \end{aligned}$$

jednak je Laplaceovom razvoju te determinante po njezinom j-tom stupcu $(1 \le j \le n)$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij} \\ &= (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, M_{1j} + (-1)^{2+j}\, a_{2j}\, M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}\, a_{nj}\, M_{nj}. \end{aligned} \tag{13}$$

Komentar:

- Primjenom propozicije 8.44 proizlazi da se svaka determinanta izračunava Laplaceovim razvojem po bilo kojem njezinom retku ili stupcu, pri čemu joj je vrijednost jedinstvena.

  Drugim riječima, vrijednost determinante ne ovisi o izboru njezinog retka ili stupca po kojemu vršimo Laplaceov razvoj te determinante.

- Ponovimo, pozicija svakog elementa a_{ij} determinante n-tog reda jednoznačno je određena njegovim indeksima i i j $(i, j = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N})$, gdje i određuje poziciju retka, a j poziciju stupca na kojemu se nalazi a_{ij}. Time kažemo da se element a_{ij} determinante (n-tog reda) nalazi na poziciji i-tog retka i j-tog stupca te determinante.
  S druge strane, uzimajući u obzir da su i i j prirodni brojevi, proizlazi da je njihov zbroj paran ili neparan prirodan broj. Time dobivamo da se svaki element a_{ij} determinante (n-tog reda) ujedno nalazi na parnoj ili neparnoj poziciji te determinante.

- Za element a_{ij} determinante (n-tog reda) kažemo da je na:

  – parnoj poziciji ako je zbroj $i + j$ njegovih indeksa i i j jednak parnom broju,
  – neparnoj poziciji ako je zbroj $i + j$ njegovih indeksa i i j jednak neparnom broju.

- Primjenom svojstva: $\quad (-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{ako je } m = 2k \\ -1 & \text{ako je } m = 2k-1 \end{cases} \quad$ za svaki $k \in \mathbb{N}$

  proizlazi da se Laplaceov razvoj (svake) determinante po njezinom retku (stupcu) u formulama (12) i (13) izvodi tako da se svaki element a_{ij} nekog retka (stupca) te determinante množi sa svojom minorom M_{ij} i s 1 ili -1 ovisno o tome nalazi li se element a_{ij} na parnoj ili neparnoj poziciji te determinante.

  Drugim riječima, umnošku $a_{ij}\, M_{ij}$ elementa a_{ij} s njegovom minorom M_{ij}

  ⊚ ne mijenjamo predznak ako se element a_{ij} nalazi na parnoj poziciji
  (jer u tom slučaju umnožak $a_{ij}\, M_{ij}$ množimo s 1),
  ⊚ mijenjamo predznak ako se element a_{ij} nalazi na neparnoj poziciji
  (jer tada umnožak $a_{ij}\, M_{ij}$ množimo s -1).

- Navedeni postupak Laplaceovog razvoja determinante po njezinom proizvoljnom retku (stupcu) nastavlja se do dobivanja minora (subdeterminanti) drugog reda, koje se nadalje izračunavaju primjenom formule (11).

  Pritom treba napomenuti da se formula (11) dobiva zapravo primjenom Laplaceovog razvoja po retcima (stupcima) determinante drugog reda. Jasno, u tom slučaju minore elemenata determinante drugog reda su odgovarajuće determinante prvog reda.

Definicija 8.45

Produkt minore M_{ij} elementa a_{ij} determinante n-tog reda i broja $(-1)^{i+j}$ označavamo s A_{ij} i zovemo **algebarskim komplementom** ili **kofaktorom elementa** a_{ij} (determinante n-tog reda) te pišemo:

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}, \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Komentar:

Primjenom definicije 8.45 na izraze (12) i (13) proizlazi da se Laplaceov razvoj determinante D n-tog reda po njezinom i-tom retku $(1 \leq i \leq n)$ može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \\ &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \end{aligned} \tag{14}$$

i analogno se Laplaceov razvoj determinante D n-tog reda po njezinom j-tom stupcu $(1 \leq j \leq n)$ zapisuje:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \\ &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}. \end{aligned} \tag{15}$$

◎ Dakle, determinanta kvadratne matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ reda n izračunava Laplaceovim razvojem po njezinom i-tom retku ili njezinom j-tom stupcu:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \end{aligned}$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, a M_{ij} je minora elementa a_{ij} determinante matrice $\mathbf{A}$ za svaki $1 \leq i, j \leq n$.

Primjer 8.46

Neka je zadana kvadratna matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ reda 3.

Tada se primjenom formule (12) dobiva da je Laplaceov razvoj determinante matrice $\mathbf{A}$ po njezinom prvom retku oblika:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}. \end{aligned} \tag{16}$$

Analogno, primjenom formule (13) dobiva se sljedeći Laplaceov razvoj determinante matrice $\mathbf{A}$ po njezinom drugom stupcu:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{22}\,a_{11}\,a_{33} - a_{22}\,a_{13}\,a_{31} - a_{32}\,a_{11}\,a_{23} + a_{32}\,a_{13}\,a_{21}. \quad (17)$$

Lagano se može provjeriti jednakost izraza (16) i (17).

Primjer 8.47

Laplaceov razvoj determinante četvrtog reda po njezinom prvom retku je oblika:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Pritom dobivene minore elemenata (prvog retka) determinante četvrtog reda su zapravo determinante trećeg reda koje se mogu izračunati primjenom Sarrusovog pravila ili Laplaceovim razvojem po proizvoljnom retku (stupcu) odgovarajuće determinante trećeg reda.

Primjer 8.48

Primjenom Laplaceovog razvoja izračunajmo sljedeće determinante trećeg reda:

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2+5) - 2 \cdot (4-3) - 1 \cdot (-10+3) = 3 - 2 + 7 = 8$$

(razvoj po prvom retku)

$$(b) \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \cdot (2-1) + 5 \cdot (7+2) + 2 \cdot (-7-4) = -7 + 45 - 22 = 16$$

(razvoj po trećem retku)

Usporedite zadane determinante s determinantama zadanih u primjeru 8.42.

8.4.2 Svojstva determinanti

U nastavku ćemo navesti svojstva determinante (n-tog reda, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Pritom ćemo navedena svojstva dodatno objasniti na determinati trećeg reda (zadanoj u primjeru 8.42, odnosno u primjeru 8.48), gdje je:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 8. \tag{18}$$

1. Ako u determinanti zamijenimo dva retka (ili dva stupca), onda determinanta mijenja predznak.

   - Konkretno, ako zamijenimo prvi i treći redak u determinanti (18), onda dobivamo:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

   gdje je:

   $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot (1-2) + 5 \cdot (-2-1) + 2 \cdot (4+1) \\ &= -3 - 15 + 10 = -8. \end{aligned}$$

2. Ako sve retke zamijenimo s odgovarajućim stupcima (ili obratno sve stupce zamijenimo s odgovarajućim retcima), onda se determinanta ne mijenja (tj. determinanta ne mijenja predznak).

   - Konkretno, dobivamo:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

   gdje je:

   $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-2+5) - 2 \cdot (4-5) + 3 \cdot (2-1) \\ &= 3 + 2 + 3 = 8. \end{aligned}$$

3. Determinantu množimo (realnim ili kompleksnim) brojem λ tako da svaki element samo jednog proizvoljnog retka (stupca) pomnožimo brojem λ.

Obzirom na determinantu n-tog navedeno svojstvo može se zapisati u obliku:

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda \cdot a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda \cdot a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda \cdot a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \lambda \cdot a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Specijalno, za $\lambda = 0$ dobivamo da je umnožak svake determinante i nule jednak nuli.

- Konkretno, ako determinantu (18) pomnožimo s 3, onda dobivamo:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 = 24.$$

  S druge strane, dobivamo:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6+15) - 2 \cdot (12-9) - 1 \cdot (-30+9)$$

$$= 9 - 6 + 21 = 24.$$

4. Ako determinanta ima nul-redak (ili nul-stupac), odnosno ako je svaki element nekog retka (ili stupca) determinante jednak nuli, onda je determinanta jednaka nuli.

   Ako determinanta ima barem jedan nul-redak (nul-stupac), onda se Laplaceovim razvojem determinante upravo po njezinom nul-retku (nul-stupcu) direktno dobiva da je ta determinanta jednaka nuli.

   S druge strane, nul-redak (nul-stupac) proizvoljne determinante možemo dobiti tako da determinantu pomnožimo s nulom (vidi svojstvo 3 za $\lambda = 0$).

- Konkretno, ako determinantu (18) pomnožimo nulom, onda dobivamo determinantu koja ima jedan nul-redak (nul-stupac):

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

s druge strane, primjenom Laplaceovog razvoja determinante po njezinom nul-retku (ili nul-stupcu) dobivamo:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2+5) + 0 \cdot (4-3) + 0 \cdot (-10+3) = 0.$$

5. Determinanta se ne mijenja ako elemente nekog njezinog retka (stupca) pribrojimo odgovarajućim elementima nekog drugog njezinog retka (stupca).

   - Konkretno, ako elemente prvog stupca determinante (18) pribrojimo odgovarajućim elementima njezinog trećeg stupca, onda dobivamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5+15) - 2 \cdot (10-9) = 10 - 2 = 8.$$

6. Determinanta se ne mijenja ako elemente nekog njezinog retka (stupca) pomnožimo nekim brojem λ i zatim ih pribrojimo odgovarajućim elementima nekog drugog njezinog retka (stupca).

   - Konkretno, ako elemente prvog retka determinante (18) pomnožimo s npr. -3 i zatim ih pribrojimo odgovarajućim elementima njezinog trećeg retka, onda dobivamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5+11) - 2 \cdot (10-11) + 0 = 6 + 2 = 8.$$

7. Ako su odgovarajući elementi dva retka (ili dva stupca) determinante jednaki ili proporcionalni, onda je determinanta jednaka nuli.

   Primijetimo da svojstvo 7. direktno proizlazi iz svojstva 6. i svojstva 4.

   Naime, prema svojstvu 6. ako su odgovarajući elementi dva retka (ili dva stupca) determinante jednaki, onda množenjem jednog od ta dva retka (stupca) s -1 i zatim pribrajanjem odgovarajućim elementima drugog (od dva jednaka) retka (stupca) dobiva se nul-redak (nul-stupac) determinante pa primjenom svojstva 4. direktno proizlazi da je determinanta jednaka nuli.

   - Konkretno, neka je zadana determinanta trećeg reda kojoj su elementi drugog i trećeg reda jednaki.

     Tada elemente drugog retka zadane determinante možemo pomnožiti s -1 i zatim ih pribrojiti odgovarajućim elementima njezinog trećeg retka, čime dobivamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako su odgovarajući elementi dva retka (ili dva stupca) determinante proporcionalni, gdje je $\lambda \neq 0$ koeficijent proporcionalnosti, onda množenjem (dijeljenjem) jednog od ta dva retka (stupca) s λ dobiva se determinanta s dva jednaka retka (stupca), koja je jednaka nuli.

- Konkretno, neka je zadana determinanta trećeg reda kojoj su elementi prvog i trećeg stupca proporcionalni s koeficijentom proporcionalnosti jednakim -3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Primijetimo ako elemente prvog stupca pomnožimo s -3 ili ako elemente trećeg stupca podijelimo s -3, onda dobivamo determinantu kojoj su elementi prvog i trećeg stupca jednaki (pa je determinanta jednaka nuli):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -5 & 9 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0 = 0.$$

U nastavku ćemo navesti (bez dokaza) svojstva determinanti nekih kvadratnih matrica.

Propozicija 8.49

Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}],\ 1 \leq i, j \leq n$ *bilo koja kvadratna matrica reda* n. *Tada je*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T.$$

Propozicija 8.50

Determinanta gornje (*ili donje*) *trokutaste matrice* $\mathbf{A}$ *reda* n *jednaka je umnošku*

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

elemenata njezine glavne dijagonale.

Primjer 8.51

Neka je zadana gornja trokutasta matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ reda 3.

Tada primjenom propozicije 8.50 dobivamo da je $\det \mathbf{A} = 3 \cdot (-4) \cdot 5 = -60.$

Primijetimo da se determinanta zadane matrice mogla riješiti i Laplaceovim razvojem ili Sarrusovim pravilom.

Korolar 8.52

Ako je barem jedan element glavne dijagonale gornje (*ili donje*) *trokutaste matrice jednak nuli, onda je determinanta te matrice jednaka nuli.*

Primjer 8.53

Neka je $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Tada je $\det \mathbf{B} = 0$.

Primijetimo da je $\mathbf{B}$ gornja trokutasta matrica reda 3 kojoj je jedan element glavne dijagonale jednak nuli, stoga je:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Propozicija 8.54

Determinanta dijagonalne matrice $\mathbf{A}$ *reda* n *jednaka je umnošku* $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ *elemenata njezine glavne dijagonale.*

Korolar 8.55

Determinanta skalarne matrice $\mathbf{A}$ *reda* n *jednaka je* n*-toj potenciji jednog njezinog dijagonalnog elementa.*

Determinanta jedinične matrice $\mathbf{I}$ $($*bilo kojeg reda* $n \in \mathbb{N})$ *jednaka je broju* 1.

Teorem 8.56 $(\mathbf{Binet - Cauchy})$

Za bilo koje dvije kvadratne matrice $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *istog reda vrijedi:*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

Definicija 8.57

Ako je $\det \mathbf{A} \neq 0$, onda kažemo da je $\mathbf{A}$ **regularna matrica**, a u protivnom da je $\mathbf{A}$ **singularna matrica**.

Dakle, $\mathbf{A}$ je singularna matrica ako je $\det \mathbf{A} = 0$.

Jedinična matrica $\mathbf{I}$ je najjednostavniji primjer regularne matrice, a nul-matrica $\mathbf{O}$ je najjednostavniji primjer singularne matrice. Podsjetimo se: $\det \mathbf{I} = 1$, $\det \mathbf{O} = 0$.

Zadatak 8.58

Dokažite da su sljedeće matrice

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

regularne i da su sljedeće matrice

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

singularne.

8.5 Inverzna matrica

Definicija 8.59

Neka je $\mathbf{A}$ regularna matrica reda n i $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda n.
Inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$, u oznaci $\mathbf{A}^{-1}$, je kvadratna matrica reda n za koju vrijedi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Propozicija 8.60

Ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, onda postoji jedinstvena inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ matrice $\mathbf{A}$.

Iz definicije 8.59 proizlazi da je inverzna matrica definirana samo za regularne matrice, dok za singularne matrice ne postoji inverzna matrica. S druge strane, iz definicije 8.57 proizlazi da samo kvadratne matrice mogu biti regularne ili singularne, stoga za matrice tipa $m \times n$ za $m \neq n$ ne postoje inverzne matrice, jer za takve matrice nije definirana determinanta.
Nadalje, iz propozicije 8.60 proizlazi da za svaku regularnu matricu $\mathbf{A}$ postoji jedinstvena (točno jedna) inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.
Drugim riječima, ne postoji više različitih inverznih matrica matrice $\mathbf{A}$.

Dokaz jedinstvenosti inverzne matrice:

Pretpostavimo da postoje dvije inverzne matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ matrice $\mathbf{A}$.

Tada primjenom definicije 8.59 slijedi:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \wedge \quad \mathbf{A}\,\mathbf{C} = \mathbf{C}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Množeći $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{I}$ slijeva s matricom $\mathbf{C}$ dobivamo:

$$\mathbf{C}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \mathbf{C}\,\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{C}\,\mathbf{A})\,\mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}\,\mathbf{B} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Analogno, množeći $\mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$ zdesna s matricom $\mathbf{C}$ dobivamo:

$$(\mathbf{B}\,\mathbf{A})\,\mathbf{C} = \mathbf{I}\,\mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{C}) = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}\,\mathbf{I} = \mathbf{C} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}.$$

Dakle, iz pretpostavke da su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ dvije inverzne matrice matrice $\mathbf{A}$, proizlazi da su one jednake. Time je dokazana jedinstvenost inverzne matrice.
Pritom se koristilo svojstvo asocijativnosti množenja matrica i svojstvo neutrala jedinične matrice $\mathbf{I}$ reda n u odnosu na množenje kvadratnih matrica reda n.

Propozicija 8.61

Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ bilo koje dvije regularne matrice. Tada vrijede sljedeća svojstva:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\lambda\,\mathbf{A})^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\,\mathbf{A}^{-1}$ *za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
3. $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$
4. $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$

8.5.1 Izračunavanje inverzne matrice

Propozicija 8.62

Neka je $\mathbf{A} = [a_{ij}],\ i,j = 1,2,\ldots,n$ *regularna matrica reda* n.
Inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ *matrice* $\mathbf{A}$ *izračunava se primjenom formule:*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & \ldots & A_{1j} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & \ldots & A_{2j} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \ldots & \ldots & A_{ij} & \ldots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & \ldots & A_{nj} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}^T . \tag{19}$$

Podsjetimo se, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ za svaki $1 \leq i,j \leq n$,
M_{ij} je minora (subdeterminanta) elementa a_{ij} determinante matrice $\mathbf{A}$
(dobiva se iz $\det \mathbf{A}$ izostavljanjem njezinog i-tog retka i j-tog stupca).

Primjer 8.63

Odredimo inverzne matrice matrica

$$(a) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad (b) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

(a) Najprije treba provjeriti postoji li inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$, odnosno je li $\det \mathbf{A} \neq 0$, stoga izračunajmo najprije njenu determinantu. Koristeći Laplaceov razvoj determinante matrice $\mathbf{A}$ po njezinom prvom retku, dobivamo:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (15 - 16) - 2 \cdot (10 - 12) + 3 \cdot (8 - 9) = -1 + 4 - 3 = 0,$$

gdje su u zagradama izračunate odgovarajuće minore elemenata prvog retka determinante matrice $\mathbf{A}$. Dobili smo da je $\det \mathbf{A} = 0$, odakle proizlazi da je $\mathbf{A}$ singularna matrica.

Zaključujemo da za zadanu matricu $\mathbf{A}$ ne postoji inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$.

(b) Izračunajmo najprije determinantu matrice $\mathbf{B}$, primjenom Laplaceovog razvoja determinante matrice $\mathbf{B}$ po njezinom drugom stupcu:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 + 2) - 2 \cdot (-3 + 1) = -5 + 4 = -1 \neq 0.$$

Dobili smo da je $\det \mathbf{B} \neq 0$, stoga je $\mathbf{B}$ regularna matrica pa postoji inverzna matrica $\mathbf{B}^{-1}$ matrice $\mathbf{B}$.

Izračunajmo sada algebarske komplemente B_{ij} elemenata b_{ij} determinante matrice $\mathbf{B}$ za svaki $i, j = 1, 2, 3$. Primjenom prethodno navedene formule proizlazi:

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{za svaki} \quad i, j = 1, 2, 3,$$

stoga dobivamo

$$B_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \qquad B_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad B_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad B_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -11 \qquad B_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

pa primjenom formule (19) slijedi:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -5 & 2 \\ -5 & -11 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & -11 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Time je $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ invezna matrica zadane matrice $\mathbf{B}$.

8.5.2 Gauss-Jordanova metoda za računanje inverzne matrice

Inverznu matricu neke regularne matrice možemo izračunati i primjenom Gauss-Jordanove metode za računanje inverzne matrice.

Prije detaljnijeg objašnjenja Gauss-Jordanove metode za računanje inverzne matrice, objasnit ćemo elementarne transformacije nad retcima (stupcima) neke matrice i pojam nadopunjene matrice. Pritom matrica ne mora biti nužno kvadratna matrica, već može biti i tipa $m \times n$ za $m \neq n$.

Definicija 8.64

Nad retcima ili stupcima neke matrice mogu se izvesti sljedeće transformacije

1. zamjena bilo kojih dvaju redaka (stupaca) matrice,
2. množenje bilo kojeg retka (stupca) matrice sa skalarom (brojem) različitim od nule,
3. zbrajanje bilo kojih dvaju redaka (stupaca) matrice

koje nazivamo **elementarnim transformacijama**.

Navedimo da se svojstva 2. i 3. najčešće koriste zajedno tako da se neki redak (stupac) matrice pomnoži s brojem različitim od nule i zatim se tako dobiveni redak (stupac) pribroji nekom drugom retku (stupcu) te matrice.

◇ Svakom se elementarnom transformacijom nad retcima ili stupcima neke matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ (proizvoljnog tipa $m \times n$), matrica $\mathbf{A}$ svodi na jednostavniju (reduciranu) matricu $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ istog tipa $(m \times n)$ za koju kažemo da je **ekvivalentna** matrici $\mathbf{A}$ i pišemo: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Pritom je $\sim$ (relacija evivalentnosti matrica) na skupu $\mathcal{M}_{mn}$ svih matrica tipa $m \times n$ definirana na sljedeći način:

$(\forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}) \quad \mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ ako i samo ako se matrica $\mathbf{B}$ dobiva nekom elementarnom transformacijom nad retcima (stupcima) matrice $\mathbf{A}$.

Pokazuje se da relacija evivalentnosti matrica zadovoljava svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti na skupu $\mathcal{M}_{mn}$, stoga je ona ujedno i relacija ekvivalencije na skupu svih matrica tipa $m \times n$, gdje m i n mogu biti različiti ili jednaki prirodni brojevi.

U nastavku će se promatrati matrice tipa $m \times n$ za $m = n$, odnosno kvadratne matrice reda n.

Definicija 8.65

Nadopunjena matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ reda n je matrica tipa $n \times 2n$ koju označavamo: $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ i definiramo:

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right]. \tag{20}$$

Dakle, nadopunjena matrica kvadratne matrice $\mathbf{A}$ reda n je matrica sastavljena od matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{I}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda jednakog redu matrice $\mathbf{A}$.

Ako pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ regularna matrica reda n, onda postoji jedinstvena inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ matrice $\mathbf{A}$ (vidi propoziciju 8.60).

Iz činjenice da je $\mathbf{A}^{-1}$ kvadratna matrica reda n, slijedi da je ona ulančana s nadopunjenom matricom $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ tipa $n \times 2n$, stoga je definiran produkt matrica $\mathbf{A}^{-1}$ i $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$. Primjenom definicije za množenje matrica kao i svojstva: $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}$, ako nadopunjenu matricu $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ pomnožimo slijeva s $\mathbf{A}^{-1}$, onda dobivamo:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot [\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{I}\,\right] = \left[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,\right]. \tag{21}$$

Jasno, $[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]$ je nova nadopunjena matrica tipa $n \times 2n$ sastavljena od matrica $\mathbf{I}$ i $\mathbf{A}^{-1}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda jednakog redu matrice $\mathbf{A}$, odnosno redu matrice $\mathbf{A}^{-1}$.

Primijetimo da izraz (21) ima smisla jedino ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica. Izraz (21) nije definiran u slučaju kada je $\mathbf{A}$ singularna matrica, jer za singularnu matricu ne postoji inverzna matrica.

Objasnimo sada Gauss-Jordanovu metodu za računanje inverzne matrice.

- U Gauss-Jordanovoj metodi za računanje inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ matrice $\mathbf{A}$ reda n koristi se nadopunjena matrica $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ (tipa $n \times 2n$) **nad čijim se retcima** primjenjuju elementarne transformacije do dobivanja nove nadopunjene matrice oblika $[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]$ koja će u svom lijevom dijelu sadržavati jediničnu matricu $\mathbf{I}$ (reda n). Pritom se u desnom dijelu tako dobivene matrice $[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]$ dobiva inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$ matrice $\mathbf{A}$ - vidi primjer 8.66.

  Primjenjivanjem elementarnih transformacija nad retcima nadopunjene matrice $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ dobivaju se matrice koje su ekvivalentne nadopunjenoj matrici $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$, stoga je:

$$[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \sim [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1}\,]\,.$$

Napomena:

Prije nego li započnemo s postupkom primjenjivanja elementarnih transformacija nad retcima nadopunjene matrice $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ bilo bi poželjno ispitati regularnost matrice $\mathbf{A}$, odnosno treba provjeriti je li $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Ponovimo, ako dobijemo da je $\det \mathbf{A} = 0$, onda zaključujemo da je $\mathbf{A}$ singularna matrica za koju ne postoji inverzna matrica $\mathbf{A}^{-1}$, stoga nije potrebno primijeniti prethodno opisanu Gauss-Jordanovu metodu za računanje inverzne matrice.
S druge strane, ako se ipak primijeni Gauss-Jordanova metoda za računanje inverzne matrice u slučaju kada je $\mathbf{A}$ singularna matrica, onda se primjenom elementarnih transformacija nad retcima nadopunjene matrice $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ dobiva nadopunjena matrica koja u svom lijevom dijelu sadrži barem jedan nul-redak (ili nul-stupac) - vidi primjer 8.66.

Primjer 8.66

Gauss-Jordanovom metodom odredimo inverzne matrice matrica

$$(a) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad (b) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

(a) Izračunavanjem determinante matrice $\mathbf{B}$ dobivamo:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

vidi primjer 8.63 pod (b), stoga je $\mathbf{B}$ regularna matrica pa postoji $\mathbf{B}^{-1}$.

Obzirom na zadanu matricu $\mathbf{B}$, nadopunjena matrica $[\,\mathbf{B} \mid \mathbf{I}\,]$ (tipa 3×6) je oblika:

$$[\,\mathbf{B} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{22}$$

Nad retcima nadopunjene matrice (22) primjenit ćemo sljedeće elementarne transformacije sve do dobivanja nove nadopunjene matrice koja će u svom lijevom dijelu sadržavati jediničnu matricu $\mathbf{I}$ reda 3. Pritom dobivamo sljedeće matrice ekvivalentne nadopunjenoj matrici (22):

$$
\begin{aligned}
[\,\mathbf{B} \mid \mathbf{I}\,] &= \left[\begin{array}{rrr|rrr} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{(zamjena prva da retka)} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{(prvi redak pomnožen s } 3 \text{ i dodan drugom retku)} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] && \text{(prvi redak pomnožen s } 2 \text{ i dodan trećem retku)} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] && \text{(drugi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan trećem retku)} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] && \text{(treći redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan drugom retku)} \\
&\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] && \text{(treći redak pomnožen s } -1 \text{ i dodan prvom retku).}
\end{aligned}
$$

Dakle, dobili smo novu nadopunjenu matricu oblika $[\,\mathbf{I} \mid \mathbf{B}^{-1}\,]$ koja u svom lijevom dijelu sadrži jediničnu matricu $\mathbf{I}$ reda 3, a u svom desnom dijelu traženu inverznu matricu $\mathbf{B}^{-1}$ matrice $\mathbf{B}$. Time je

$$
\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 5 & 11 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.
$$

(b) Izračunavanjem determinante matrice $\mathbf{A}$ dobivamo:

$$
\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,
$$

vidi primjer 8.63 pod (a), stoga je $\mathbf{A}$ singularna matrica pa ne postoji $\mathbf{A}^{-1}$.

S druge strane, obzirom na zadanu matricu $\mathbf{A}$, nadopunjena matrica $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ (tipa 3×6) je oblika:

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Primjenom elementarnih transformacija nad retcima matrice $[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,]$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{(prvi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan drugom retku)} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] && \text{(prvi redak pomnožen s } -3 \text{ i dodan trećem retku)} \\
&\sim \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]}_{=[\,\mathbf{C}|\mathbf{D}\,]} && \text{(drugi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan trećem retku).}
\end{aligned}$$

Pritom smo dobili novu nadopunjenu matricu oblika $[\,\mathbf{C} \mid \mathbf{D}\,]$ koja u svom lijevom dijelu sadrži kvadratnu matricu

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

reda 3. Primijetimo da je treći redak matrice $\mathbf{C}$ nul-redak, stoga se nijednim daljnjim elementarnim transformacijama nad retcima nadopunjene matrice $[\,\mathbf{C} \mid \mathbf{D}\,]$ ne može dobiti jedinična matrica na mjestu matrice $\mathbf{C}$.

Time zaključujemo da ne postoji inverzna matrica matrice $\mathbf{A}$, odnosno da je $\mathbf{A}$ singularna matrica.

8.6 Matrične jednadžbe

Neka je zadana kvadratna matrica $\mathbf{A}$ reda n i matrice $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$ takve da je

$$\mathbf{B} = [b_{ij}]_n^k \quad \text{matrica tipa } n \times k, \qquad \mathbf{C} = [c_{ij}]_m^n \quad \text{matrica tipa } m \times n.$$

Nadalje, neka su zadane matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}, \tag{23}$$

$$\mathbf{Y}\,\mathbf{A} = \mathbf{C}. \tag{24}$$

Na prirodan način nameće se pitanje može li matrična jednadžba (23) imati jedinstveno rješenje $\mathbf{X}$ i analogno može li matrična jednadžba (24) imati jedinstveno rješenje $\mathbf{Y}$.

Sljedećom propozicijom daju se odgovori na postavljena pitanja: $\mathbf{X}$, odnosno $\mathbf{Y}$ bit će rješenja jednadžbe (23), odnosno (24) jedino ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, odnosno ako je $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Propozicija 8.67

Ako je $\mathbf{A}$ regularna kvadratna matrica reda n i $\mathbf{B}$ matrica tipa $n \times k$, onda matrična jednadžba $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

Ako je $\mathbf{A}$ regularna kvadratna matrica reda n i $\mathbf{C}$ matrica tipa $m \times n$, onda matrična jednadžba $\mathbf{Y}\,\mathbf{A} = \mathbf{C}$ ima jedinstveno rješenje $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{-1}$.

- Neka je $\mathbf{A}$ regularna kvadratna matrica reda n, $\mathbf{B}$ matrica tipa $n \times k$ i neka je zadana matrična jednadžba:

  $$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

  Ako tu jednadžbu pomnožimo slijeva matricom $\mathbf{A}^{-1}$, onda dobivamo:

  $$\mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$
  $$\left(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\right)\,\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

  odakle proizlazi: $\quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

  Pritom se koristilo svojstvo asocijativnosti množenja matrica i svojstva:

  $$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}\,\mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

  Lako se vidi da je $\mathbf{X}$ matrica tipa $n \times k$.

- Neka je $\mathbf{A}$ regularna kvadratna matrica reda n, $\mathbf{C}$ matrica tipa $m \times n$ i neka je zadana matrična jednadžba:

  $$\mathbf{Y}\,\mathbf{A} = \mathbf{C}.$$

  Ako tu jednadžbu pomnožimo zdesna matricom $\mathbf{A}^{-1}$, onda dobivamo:

  $$(\mathbf{Y}\,\mathbf{A})\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{-1}$$
  $$\mathbf{Y}\,\left(\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1}\right) = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{-1}$$

odakle proizlazi: $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^{-1}$, gdje je $\mathbf{Y}$ matrica tipa $m \times n$.

Pritom se koristilo svojstvo asocijativnosti množenja matrica i svojstva:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Y}\,\mathbf{I} = \mathbf{Y}.$$

Primjer 8.68

Riješimo sljedeću matričnu jednadžbu $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ako su zadane matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

Obzirom na prethodno navedeno, rješenje zadane matrične jednadžbe biti će matrica $\mathbf{X}$, jedino ako prije toga pokažemo da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne matrice. U protivnom ako je $\mathbf{A}$ ili $\mathbf{B}$ singularna matrica, onda zadana matrična jednadžba nema rješenja.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1 \qquad \mathbf{A} \text{ je regularna matrica, stoga postoji } \mathbf{A}^{-1}$$

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2 \qquad \mathbf{B} \text{ je regularna matrica, stoga postoji } \mathbf{B}^{-1}.$$

Dakle, zadana matrična jednadžba ima jedinstveno rješenje $\mathbf{X}$.

Ako zadanu jednadžbu pomnožimo slijeva matricom $\mathbf{A}^{-1}$ i zdesna matricom $\mathbf{B}^{-1}$, onda se dobiva:

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\right)\,\mathbf{X}\,\left(\mathbf{B}\,\mathbf{B}^{-1}\right) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1},$$

odakle proizlazi: $\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}}$,

pri čemu se primijenilo svojstvo da je produkt matrice s njezinom inverznom matricom jednak jediničnoj matrici koja je neutralni element u odnosu na množenje matrica.

Izračunajmo sada inverzne matrice $\mathbf{A}^{-1}$ i $\mathbf{B}^{-1}$ primjenom formule (19).

◎ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T,$

iz $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ za svaki $i, j = 1, 2$ slijedi:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot (-2) = -2 \qquad A_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot 5 = -5 \qquad A_{22} = (-1)^4 \cdot 3 = 3$$

stoga je $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

odnosno $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$

◎ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}^T$,

iz $B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ za svaki $i, j = 1, 2$ slijedi:

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot 8 = 8 \qquad B_{21} = (-1)^3 \cdot 6 = -6$$

$$B_{12} = (-1)^3 \cdot 7 = -7 \qquad B_{22} = (-1)^4 \cdot 5 = 5$$

stoga je $\quad \mathbf{B}^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}^T = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$

odnosno $\quad \mathbf{B}^{-1} = -\dfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$.

Time iz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{C}\,\mathbf{B}^{-1}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

stoga je kadratna matrica $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ reda 2 rješenje zadane matrične jednadžbe.

8.7 Rang matrice

Prije definiranja ranga matrice potrebno je definirati pojmove linearne zavisnosti i linearne nezavisnosti redaka (stupaca) bilo koje proizvoljne matrice tipa $m \times n$, gdje prirodni brojevi m i n mogu ali ne moraju biti jednaki.

Definicija 8.69

Kažemo da je skup redaka (stupaca) neke matrice $\mathbf{A}$ (tipa $m \times n$) **linearno zavisan** ako se primjenom elementarnih transformacija nad retcima (stupcima) matrice $\mathbf{A}$ može dobiti ekvivalentna matrica kojoj su svi elementi barem jednog retka (stupca) nule.

Kažemo da je skup redaka (stupca) neke matrice $\mathbf{A}$ (tipa $m \times n$) **linearno nezavisan** ako nije linearno zavisan.

Dakle, skup redaka ili skup stupaca neke matrice proizvoljnog tipa je linearno zavisan ako se primjenom elementarnih transformacija nad retcima ili nad stupcima te matrice dobiva ekvivalentna (jednostavnija) matrica koja sadrži barem jedan nul-redak ili barem jedan nul-stupac. Pritom je dobivena matrica ekvivalentna matrici $\mathbf{A}$.

Ponovimo, elementarnim transformacijama nad retcima ili stupcima neke matrice $\mathbf{A}$ dobivaju se ekvivalentne jednostavnije matrice (istog tipa ili reda) koje su ekvivalentne matrici $\mathbf{A}$. Pod elementarnim transformacijama podrazumijeva se:

- ⊖ zamjena bilo koja dva retka (stupca) matrice ili
- ⊖ množenje bilo kojeg retka (stupca) brojem različitim od nule ili
- ⊖ zbrajanje bilo koja dva retka (stupca) matrice.

Definicija 8.70

Rang matrice $\mathbf{A}$ označava se s $r(\mathbf{A})$ i definira kao najveći broj linearno nezavisnih redaka matrice $\mathbf{A}$. **Rang nul-matrice** jednak je nuli.

Teorem 8.71

Za svaku matricu vrijedi da je najveći broj njezinih linearno nezavisnih redaka jednak najvećem broju njezinih linearno nezavisnih stupaca.

Posljedica teorema je sljedeći korolar:

Korolar 8.72

(i) *Za svaku matricu* $\mathbf{A}$ *vrijedi* $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$.

(ii) *Ako je* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *matrica tipa* $m \times n$, *gdje je* $m \neq n$, *onda je* $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$. *Specijalno, ako je* $m = n$, *onda je* $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq n$.

Ponovimo, ako je $m = n$, onda je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica reda n.

Propozicija 8.73

Ako su dvije matrice ekvivalentne, onda one imaju isti rang.

Dakle, za matrice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ i $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ istog tipa $m \times n$, gdje prirodni brojevi m i n mogu, ali ne moraju biti jednaki, vrijedi:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B}).$$

Obrat ne vrijedi, odnosno iz jednakosti ranga dviju matrica ne proizlazi da su one ujedno i ekvivalentne matrice.

Ponovimo, kvadratna matrica $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $i, j = 1, 2, \ldots, n$ reda n može biti regularna ili singularna.

Navedimo tvrdnje (bez dokaza) koje vrijede za regularne i singularne matrice:

Propozicija 8.74

Ako je $\mathbf{A}$ *regularna matrica reda* n, *onda je:*

- ◇ $\det \mathbf{A} \neq 0$,
- ◇ *svi retci* $($*stupci*$)$ *matrice* $\mathbf{A}$ *su linearno nezavisni,*
- ◇ $r(\mathbf{A}) = n$ *(rang regularne matrice jednak je redu te matrice).*

Propozicija 8.75

Ako je $\mathbf{A}$ *singularna matrica reda* n, *onda je:*

- $\det \mathbf{A} = 0$,
- *neki retci* $($*stupci*$)$ *matrice* $\mathbf{A}$ *su linearno zavisni,*
- $0 \leq r(\mathbf{A}) < n$ *(rang singularne matrice jednak je nenegativnom cijelom broju koji je strogo manji od reda te matrice).*

Primjer 8.76

Odredimo rang matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

Zadana matrica je tipa 3×4. Nadalje, $\min\{3, 4\} = 3$, stoga primjenom korolara 8.72 proizlazi: $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq 3$.

Pri određivanju ranga zadane matrice $\mathbf{A}$ potrebno je provjeriti koliko najviše linearno nezavisnih redaka (ili stupaca) ima matrica $\mathbf{A}$, gdje primijenjujemo elementarne transformacije nad retcima (ili stupcima) matrice $\mathbf{A}$.

Za zadanu matricu, efikasnije je primjenjivati elementarne transformacije nad njezinim retcima, jer matrica $\mathbf{A}$ ima manje redaka od stupaca.

Ako prvi redak matrice $\mathbf{A}$ pomnožimo s -2 i dodamo njezinom drugom retku i ako prvi redak matrice $\mathbf{A}$ pomnožimo s -1 i dodamo njezinom trećem retku, onda dobivamo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Nadalje, ako drugi redak matrice $\mathbf{B}$ pomnožimo s -3 i dodamo njezinom trećem retku, onda dobivamo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

Zaključujemo da matrica $\mathbf{C}$ ima dva linearno nezavisna retka, jer se nijednim elementarnim transformacijama nad retcima matrice $\mathbf{C}$ ne može dobiti još jedan nul-redak u matrici $\mathbf{C}$, stoga je $r(\mathbf{C}) = 2$.

Primjenom propozicije 8.73 iz ekvivalentnosti matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ proizlazi da je $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C})$, stoga je: $r(\mathbf{A}) = 2$.

Iz dobivenog zaključujemo da zadana matrica $\mathbf{A}$ ima najviše dva linearno nezavisna retka.

Za vježbu, elementarnim transformacijama nad stupcima matrice $\mathbf{A}$, dokažite da matrica $\mathbf{A}$ ima najviše dva linearno nezavisna stupca.

Primjer 8.77

Odredimo rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

Matrica $\mathbf{A}$ je tipa 4×3, stoga je: $0\leq r(\mathbf{A})\leq 3$ (jer je iz $\min\{4,3\}=3$). Odredimo $r(\mathbf{A})$.

Primijetimo da matrica $\mathbf{A}$ ima manje stupaca od redaka, stoga je efikasnije primjeniti elementarne transformacije nad njezinim stupcima.

Ako treći stupac matrice $\mathbf{A}$ pomnožimo s 2 i dodamo njezinom drugom stupcu, onda dobivamo matricu $\mathbf{B}$ kojoj drugi stupac množimo s $\frac{1}{5}$ te dobivamo matricu $\mathbf{C}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 15 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 15 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{C}.$$

Lako se vidi da su svi stupci matrice $\mathbf{C}$ linearno nezavisni, jer se nijednim elementarnim transformacijama nad stupcima matrice $\mathbf{C}$ ne može dobiti nijedan nul-stupac u matrici $\mathbf{C}$.

Dakle, iz ekvivalentnosti matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{C}$ proizlazi: $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{C})=3$, odnosno $r(\mathbf{A})=3$.

Primjer 8.78

Odredimo vrijednosti skalara $\lambda\in\mathbb{R}$ tako da rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ bude jednak broju 1.

Rješenje:

Primijetimo da su prvi i treći stupac kvadratne matrice $\mathbf{A}$ proporcionalni, pri čemu je koeficijent proporcionalnosti jednak -1, što ima za posljedicu da su prvi i treći stupac matrice $\mathbf{A}$ linearno zavisni. Time je efikasnije primijeniti elementarne transformacije nad stupcima matrice $\mathbf{A}$.

Dakle, ako prvi stupac matrice $\mathbf{A}$ dodamo njezinom trećem stupcu, onda dobivamo matricu $\mathbf{B}$ (ekvivalentnu matrici $\mathbf{A}$) kojoj je treći stupac nul-stupac:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{B}.$$

Nadalje, ako prvi stupac matrice $\mathbf{B}$ pomnožimo s 2 i dodamo njezinom drugom stupcu, onda dobivamo matricu $\mathbf{C}$ ekvivalentnu matrici $\mathbf{B}$, a time ekvivalentnu i matrici $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4+\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{C}$$

odakle proizlazi: $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C})$.

Iz činjenice da je matrica $\mathbf{A}$ ekvivalentna matrici $\mathbf{C}$ koja se sastoji od jednog nul-stupca, zaključujemo da će rang matrice $\mathbf{A}$ biti manji ili jednak od 2 - vidi propoziciju 8.75.

Dakle, sa sigurnošću možemo reći da će rang matrice $\mathbf{A}$ biti jednak 2 ili eventualno 1, što će ovisiti o vrijednosti realnog broja (skalara) $\lambda \in \mathbb{R}$.

Razlikujemo sljedeća dva slučaja:

1. ako je $4 + \lambda = 0$, odnosno $\lambda = -4$, onda matrica $\mathbf{C}$ ima dva nul-stupca, stoga je:
$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C}) = 1;$$

2. ako je $4 + \lambda \neq 0$, odnosno $\lambda \neq -4$, onda matrica $\mathbf{C}$ ima samo jedan nul-stupac, stoga je:
$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{C}) = 2.$$

Zaključujemo, rang zadane matrice $\mathbf{A}$ jednak je jedan ako je $\lambda = -4$. U protivnom, za svaki $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{-4\}$ rang matrice $\mathbf{A}$ jednak je dva.

9 Sustavi linearnih jednadžbi

Problem rješavanja sustava linearnih jednadžbi jedan je od najvažnijih problema linearne algebre. Sustavi linearnih jednadžbi i njihovo rješavanje su najvećim dijelom povezani s matricama i matričnim računom, što će detaljnije biti obrazloženo u ovom poglavlju.

Definicija 9.1

Sustav linearnih jednadžbi, odnosno sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, gdje su m i n proizvoljni prirodni brojevi, zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{25}$$

gdje su a_{ij} i b_i skalari (zadani realni brojevi), a x_j nepoznanice sustava linearnih jednadžbi (25) za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pritom skalare a_{ij} nazivamo **koeficijentima**, a b_i **slobodnim koeficijentima** sustava linearnih jednadžbi (25).

Specijalno, ako je $b_i = 0$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$, onda kažemo da je sustav (25) **homogen**, a u protivnom da je on **nehomogen sustav linearnih jednadžbi**.

Definicija 9.2

Kažemo da je **sustav linearnih jednadžbi** (25) **rješiv** (konzistentan ili moguć) ako postoji barem jedna n-torka brojeva $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ takva da vrijedi:

$$a_{i1}\gamma_1 + a_{i2}\gamma_2 + \ldots + a_{in}\gamma_n = b_i. \tag{26}$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, m$. Pritom se uređena n-torka brojeva $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ naziva **rješenjem sustava linearnih jednadžbi** (25).

U protivnom kažemo da je **sustav linearnih jednadžbi** (25) **nerješiv** (kontradiktoran ili nekonzistentan ili nemoguć).

Primijetimo da je rješenje sustava linearnih jednadžbi (25) zapravo svaka uređena n-torka relnih brojeva $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ koja zadovoljava sve jednadžbe (26) sustava (25).

Definicija 9.3

Svaki rješiv sustav linearnih jednadžbi može imati jedinstveno rješenje ili beskonačno mnogo rješenja.

Rješiv sustav linearnih jednadžbi (25) ima **jedinstveno rješenje** (jednoznačno određeno rješenje) ako i samo ako postoji točno jedno rješenje tog sustava.

U protivnom rješiv sustav linearnih jednadžbi (25) ima **beskonačno mnogo rješenja**.

Dakle, obzirom na egzistenciju rješenja sustava linearnih jednadžbi razlikujemo sljedeće slučajeve:

1. rješiv sustav
   - $1.\,a)$ sustav ima jedinstveno rješenje,
   - $1.\,b)$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja
2. nerješiv sustav (kontradiktoran sustav, odnosno sustav nema rješenja).

Primjer 9.4

Odredimo rješenja sljedećih sustava ako je:

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad (b)\quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -3 \end{aligned} \qquad\qquad (d)\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Rješenje:

(a) Obzirom na predznanje iz srednje škole, znamo da se zadani sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

može riješiti metodom supstitucije ili metodom suprotnih koeficijenata.

Koristit ćemo metodu suprotnih koeficijenata. Dakle, ako zbrojimo jednadžbe zadnog sustava, onda dobivamo: $3x_2 = 9,$ odakle dijeljenjem s 3 slijedi: $x_2 = 3.$

Nadalje, uvrštavanjem $x_2 = 3$ u prvu jednadžbu zadanog sustava, proizlazi: $x_1 = 2.$

Time smo dobili da je zadani sustav rješiv s jedinstvenim rješenjem $x_1 = 2,\ x_2 = 3.$
Pritom kažemo da je uređeni par $(2, 3)$ jedinstveno rješenje zadanog sustava.

(b) Primjenom metode supstitucije na prvu jednadžbu sustava

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

dobiva se: $x_1 = -x_3 - 2,$ što uvrštavanjem u drugu jednadžbu povlači da je:
$-x_3 - 2 - x_2 + x_3 = -3,$ odakle je: $x_2 = 1.$

Dakle, dobili smo da je vrijednost nepoznanice x_2 jednaka jedan i da vrijednost nepoznanice x_1 ovisi o izboru vrijednosti nepoznanice x_3 koja može biti bilo koji realan broj.

Ako uvedemo supstituciju $x_3 = \alpha,$ gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$, onda je:

$$x_1 = -\,\alpha - 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \alpha \qquad \text{za svaki } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Time je zadani sustav rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja: sve uređene trojke oblika $(-\,\alpha - 2, 1, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

(c) Primjenom metode supstitucije na prvu jednadžbu sustava

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -3 \end{aligned}$$

dobiva se: $x_1 = 2x_2 + 4$, što uvrštavanjem u drugu jednadžbu povlači da je: $-4x_2 - 8 + 4x_2 = -3$, odakle slijedi: $0 = 5$ što je zapravo laž (kontradikcija).

Zaključujemo da je zadani sustav nerješiv, odnosno kontradiktoran sustav.

(d) Primjenom metode supstitucije na prvu jednadžbu sustava

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -8 \end{aligned}$$

dobiva se: $x_1 = 2x_2 + 4$, što uvrštavanjem u drugu jednadžbu povlači: $-4x_2 - 8 + 4x_2 = -8$, odakle slijedi: $0 = 0$.

Primijetimo da se identitet $0 = 0$ može pisati u obliku jednadžbe $0 \cdot x_2 = 0$ kojoj su rješenja svi realni brojevi $x_2 \in \mathbb{R}$.

U ovom slučaju se zadani sustav (dviju jednadžbi s dvije nepoznanice x_1 i x_2) sastoji od dviju proporcionalnih jednadžbi, stoga se iz jedne od zadanih dviju jednadžbi izražava jedna nepoznanica pomoću druge te dobivamo:

$$x_1 = 2x_2 + 4, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Uvođenjem supstitucuje $x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ slijedi:

$$x_1 = 2\alpha + 4, \quad x_2 = \alpha \quad \text{za svaki } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Zadani sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja, sve uređene parove oblika $(2\alpha + 4, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Napomena:

Pretpostavimo da su prirodni brojevi m i n jednaki.
Tada imamo sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica [5]

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n &= b_n \end{aligned} \tag{27}$$

koji se može zapisati u obliku matrične jednadžbe:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B} \tag{28}$$

[5] sustav sastavljen od jednakog broja jednadžbi i nepoznanica

gdje je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

pri čemu se $\mathbf{A}$ naziva **matrica sustava**, $\mathbf{X}$ **matrica nepoznanica**, a B **matrica slobodnih koeficijenata** sustava linearnih jednadžbi (27).

Pritom se rješavanje sustava linearnih jednadžbi (27) svodi na rješavanje odgovarajuće matrične jednadžbe oblika (28).

Podsjetimo se, matrična jednadžba $\mathbf{A}\,\mathbf{X}=\mathbf{B}$ imat će jedinstveno rješenje $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$ jedino ako je $\mathbf{A}$ regularna matrica, odnosno ako je $\det\mathbf{A}\neq 0$.

Time vrijede sljedeće dvije tvrdnje.

- Ako je matrica sustava linearnih jednadžbi (27) regularna matrica, onda matrična jednadžba (28) ima jedinstveno rješenje $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$, stoga i sustav linearnih jednadžbi (27) ima jedinstveno rješenje, n-torku brojeva $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ čiji su elementi ujedno elementi matrice nepoznanica.
- Ako je matrica sustava linearnih jednadžbi (27) singularna matrica, onda treba provesti dodatna ispitivanja, jer u ovom slučaju zadani sustav može biti ili nerješiv (kontradiktoran) ili rješiv s beskonačno mnogo rješenja.

Napomena:

◇ Matričnom jednadžbom oblika (28) mogu se rješavati samo sustavi linearnih jednadžbi koji imaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica i čija je matrica sustava regularna.

Dakle, matričnom jednadžbom oblika (28) ne mogu se rješavati sustavi m linearnih jednadžbi s n nepoznanica za $n\neq m$, jer u ovom slučaju matrica sustava nije kvadratna matrica.

U nastavku ćemo objasniti Gaussovu metodu eliminacije i Kronecker-Capellijev teorem pomoću kojih se rješavaju svi sustavi linearnih jednadžbi i dobivaju pouzdanije informacija o egzistenciji njihovih rješenja.

9.1 Gaussova metoda eliminacije

Neka je zadan sustav linearnih jednadžbi (25), odnosno sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, gdje su m i n proizvoljni prirodni brojevi koji mogu ali ne moraju biti različiti. Dakle, neka je zadan sustav:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

gdje su a_{ij} i b_i skalari (zadani realni brojevi), a x_j nepoznanice sustava linearnih jednadžbi (25) za svaki $i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$. Tada kažemo da je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrica sustava linearnih jednadžbi (25) i definiramo sljedeću matricu

$$\mathbf{A}_P = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]. \tag{29}$$

tipa $m \times n+1$ koju nazivamo **proširenom matricom sustava** linearnih jednadžbi (25).

> Drugim riječima, proširena matrica sustava je matrica koja je sastavljena od matrice $\mathbf{A}$ (tipa $m \times n$) i matrice $\mathbf{B}$ (tipa $m \times 1$), gdje je $\mathbf{A}$ matrica sustava (25), a $\mathbf{B}$ matrica slobodnih koeficijanata sustava (25).

Navodimo sljedeći teorem bez dokaza koji ima važnu ulogu u davanju kriterija za egzistenciju rješenja sustava linearnih jednadžbi.

Teorem 9.5 (**Kronecker – Capelli**)

Neka je zadan sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica i neka je $\mathbf{A}$ matrica sustava i $\mathbf{A}_P$ proširena matrica sustava.

Neka je $r(\mathbf{A})$ rang matrice $\mathbf{A}$ i $r(\mathbf{A}_P)$ rang matrice $\mathbf{A}_P$.

Sustav linearnih jednadžbi je rješiv ako i samo ako je

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_P).$$

Posljedica Kronecker - Capellijevog teorema je sljedeći korolar.

Korolar 9.6

Rješiv sustav linearnih jednadžbi ima

(i) *jedinstveno rješenje ako je* $r(\mathbf{A}) = n$,

(ii) *beskonačno mnogo rješenja ako je* $r(\mathbf{A}) < n$.

Ako je $r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}_P)$, *onda je sustav linearnih jednadžbi nerješiv (kontradiktoran).*

Rješavanje sustava m linearnih jednadžbi s n nepoznanica Gaussovom metodom eliminacije provodi se na sljedeći način:

- zadani sustav (25) zapisujemo u obliku $\mathbf{A}_P = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ (proširene matrice sustava) - vidi izraz (29);
- samo se nad retcima proširene matrice $\mathbf{A}_P = [\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ primijenjuju elementarne transformacije (vidi definiciju 8.64) do dobivanja matrice $\mathbf{A}'_P = [\mathbf{A}'|\mathbf{B}']$ u kojoj je $\mathbf{A}'$ gornja trokutasta matrica, gdje je $\mathbf{A}_P \sim \mathbf{A}'_P$ i $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$;
- primijenjujemo svojstvo da ekvivalentne matrice imaju isti rang, odakle proizlazi:
$$r(\mathbf{A}_P) = r(\mathbf{A}'_P), \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}');$$
- primijenjujemo Kronecker-Capellijev teorem 9.5 kojim se utvrđuje je li sustav (25) rješiv ili nerješiv;
- ako je sustav rješiv, onda određujemo njegovo rješenje (ili njegova rješenja) koja zapisujemo u obliku uređene n-torke (ili uređenih n-torki) brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Specijalno, ako je sustav rješiv s beskonačno mnogo rješenja, onda se međusobna ovisnost nepoznanica $x_1, x_2, \ldots, x_n$ izražava pomoću parametara kojih ukupno ima $n - r(\mathbf{A})$.

Rješavanje sustava Gaussovom metodom eliminacije i određivanje njegovih rješenja objasnit ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 9.7

Riješimo sljedeće sustave linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije:

$$(a) \qquad \begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$(b) \qquad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -18 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 27 \end{aligned}$$

$$(c) \qquad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje:

(a) Zadani sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

zapisujemo u obliku proširene matrice sustava, a zatim nad njezinim retcima primjenjujemo elementarne transformacije (čime se dobivaju sljedeće ekvivalentne matrice):

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_P = &\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & -5 & -6 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{(zamjena prvog i trećeg retka)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & -6 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{(prvi redak pomnožen s } -1 \text{ i dodan drugom retku)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] \qquad \text{(prvi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan trećem retku)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \qquad \text{(drugi redak pomnožen s } \tfrac{1}{2} \text{ i treći redak pomnožen s } \tfrac{1}{3}\text{)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathbf{A}'_P \qquad \text{(drugi redak dodan trećem retku).}
\end{aligned}$$

Primjenom svojstva da ekvivalentne matrice imaju isti rang proizlazi:

$$r(\mathbf{A}_P) = r(\mathbf{A}'_P) = 2, \qquad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}') = 2,$$

pri čemu je $\quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_P) < 3 \quad$ (gdje je $n = 3$ broj nepoznanica).
Time je zadani sustav rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja.

Odredimo rješenja sustava.

Iz ekvivalentnosti proširenih matrica $\mathbf{A}_P \sim \mathbf{A}'_P$, gdje je $\mathbf{A}'_P = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

reducirana matrica matrice $\mathbf{A}_P$ proizlazi da se zadani sustav može pisati u obliku sustava:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

odakle slijedi: $\quad x_1 - 1 - 3x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3x_3 + 2.$

Uvođenjem supstitucije $x_3 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},$ dobivamo:

$$x_1 = 2 + 3\alpha, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \alpha \quad \text{za svaki } \alpha \in \mathbb{R},$$

stoga su sve uređene trojke $(2 + 3\alpha, 1, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$ rješenja zadanog sustava.

(b) Analogno prethodno navedenom, obzirom na zadani sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= -18 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 27 \end{aligned}$$

dobivamo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_P = &\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \\ -1 & 3 & 5 & 27 \end{array}\right] \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 2 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & 3 & 5 & 27 \end{array}\right] \quad \text{(zamjena prvog i drugog retka)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 0 & -9 & 18 & 45 \\ -1 & 3 & 5 & 27 \end{array}\right] \quad \text{(prvi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan drugom retku)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & 9 \end{array}\right] \quad \left(\text{drugi redak pomnožen s } -\frac{1}{9} \text{ i prvi redak dodan trećemu}\right) \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 11 & 44 \end{array}\right] \quad \text{(drugi redak pomnožen s } -7 \text{ i dodan trećem retku)} \\
\sim &\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = \mathbf{A}'_P \quad \left(\text{treći redak pomnožen s } \frac{1}{11}\right)
\end{aligned}$$

pri čemu je: $\quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_P) = 3.$

Time je zadani sustav rješiv i ima jedinstveno (točno jedno) rješenje.

Nadalje, obzirom na dobivenu proširenu matricu

$$\mathbf{A}'_P = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -8 & -18 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

proizlazi:

$$\begin{aligned} &x_3 = 4 \\ &x_2 - 2x_3 = -5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3 \\ &x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -18 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \end{aligned}$$

stoga je uređena trojka $(2, 3, 4)$ jedinstveno rješenje zadanog sustava.

(c) Obzirom na zadani sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 4 \end{aligned}$$

dobivamo:

$$\mathbf{A}_P = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 5 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \quad \text{(treći redak pomnožen s } -1 \text{ i dodan prvom retku)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 14 & 8 & -26 & 18 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right] \quad \text{(prvi redak pomnožen s } -5 \text{ i dodan drugom retku)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 14 & 8 & -26 & 18 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \end{array}\right] \quad \text{(prvi redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan trećem retku)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \end{array}\right] \quad \text{(treći redak pomnožen s } -2 \text{ i dodan drugom retku)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 4 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] = \mathbf{A}'_P \quad \text{(zamjena drugog i trećeg retka)}$$

gdje je: $\quad r(\mathbf{A}_P) = 3, \quad r(\mathbf{A}) = 2.$

Budući da je $\quad r(\mathbf{A}) \neq r(\mathbf{A}_P)$

zaključujemo da je zadani sustav nerješiv, odnosno kontradiktoran.

9.2 Cramerovo pravilo

Cramerovim pravilom mogu se rješavati samo oni sustavi koji imaju jednak broj jednadžbi i nepoznanica, jer se Cramerovo pravilo zasniva na izračunu odgovarajućih determinanti.

Neka je zadan sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{30}$$

kojemu je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{31}$$

matrica sustava i uvedimo oznaku: $D = \det \mathbf{A}$. Tada je:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{32}$$

Definicija 9.8

Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ definira se determinanta matrice $\mathbf{A}_i$, u oznaci $D_i = \det \mathbf{A}_i$, takva da je

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{33}$$

♢ Dakle, za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ D_i je determinanta matrice $\mathbf{A}_i$ koja se dobiva zamjenom i-tog stupca matrice sustava (31) sa stupcem slobodnih koeficijenata sustava linearnih jednadžbi (30).

Navodimo teorem bez dokaza.

Teorem 9.9 (Cramer)

Ako je matrica sustava regularna, onda je sustav linearnih jednadžbi (30) *rješiv s jedinstvenim rješenjem* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *gdje je*

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad \textit{za svaki} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

$\diamondsuit$ Drugim riječima, ako je $D \neq 0$, onda je uređena n-torka brojeva

$$\left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \ldots, \frac{D_n}{D}\right), \quad D \neq 0$$

jedinstveno rješenje sustava linearnih jednadžbi (30).

Pritom je $D = \det \mathbf{A}$ determinanta matrice sustava linearnih jednadžbi (30), a D_i su determinante definirane izrazom (33) za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, vidi primjer 9.10.

Uočimo: ako je $D = 0$, onda sustav linearnih jednadžbi (30) može biti rješiv s beskonačno mnogo rješenja ili nerješiv (kontradiktoran), a dodatno se provjerava prethodno objašnjenom Gaussovom metodom i primjenom Kronecker-Capellijevog teorema.

S druge strane, pokazuje se da vrijedi:

- ako je $D = 0$ i ako postoji barem jedan $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $D_i \neq 0$, onda je sustav (30) nerješiv, vidi primjer 9.11;
- ako je $D = 0$ i ako su za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$, determinante D_i jednake nuli, onda ne znamo je li sustav linearnih jednadžbi (30) rješiv s beskonačno mnogo rješenja ili je nerješiv - treba dodatno ispitati Gaussovom metodom i primjenom Kronecker-Capellijevog teorema, vidi primjer 9.12.

Primjer 9.10

Riješimo sustav linearnih jednadžbi Cramerovim pravilom:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Rješenje:

Izračunajmo najprije determinantu matrice sustava primjenom Laplaceovog razvoja po njezinom prvom retku:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4+3) - 2 \cdot (8+1) + 3 \cdot (6+1) = -1 - 18 + 21 = 2.$$

Iz $D \neq 0$ proizlazi da je matrica sustava regularna, odnosno da je zadani sustav rješiv s jedinstvenim rješenjem.

Izračunajmo determinante D_i za svaki $i = 1, 2, 3$ Laplaceovim razvojem po prvom retku:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-4+3) - 2 \cdot (4+6) + 3 \cdot (3+6) = -5 - 20 + 27 = 2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4+6) - 5 \cdot (8+1) + 3 \cdot (12-1) = 10 - 45 + 33 = -2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6-3) - 2 \cdot (12-1) + 5 \cdot (6+1) = -9 - 22 + 35 = 4.$$

Tada primjenom teorema 9.9 proizlazi:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

pa je uređena trojka $(1, -1, 2)$ jedinstveno rješenje zadanog sustava.

Primjer 9.11

Riješimo sustav linearnih jednadžbi Cramerovim pravilom:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje:

Izračunajmo determinantu matrice sustava primjenom Laplaceovog razvoja po prvom stupcu:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3-18) - (15-36) + (15+6) = -42 + 21 + 21 = 0.$$

Iz $D = 0$ proizlazi da zadani sustav može biti rješiv s beskonačno mnogo rješenja ili nerješiv. Za vježbu primjenom Gaussove metode i Kronecker-Capellijevog teorema ispitati rješivost zadanog sustava.

S druge strane, izračunamo li determinante D_i za svaki $i = 1, 2, 3$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-3-18) + 5 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) = 42 + 15 + 6 = 63 \neq 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3+3) - 6 = 6 - 6 = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 - 2 \cdot (-1-1) = 11 \neq 0,$$

tada iz $D = 0$ i $D_1 \neq 0$ proizlazi da je zadani sustav nerješiv (kontradiktoran).

U izračunu determinanti D_i, $i = 1, 2, 3$ koristio se Laplaceov razvoj po prvom retku.

Primijetimo da u ovom slučaju nije bilo potrebno izračunavati determinante D_2 i D_3, jer nerješivost zadanog sustava direkto slijedi iz $D = 0$ i $D_1 \neq 0$.

Primjer 9.12

Riješimo sustav linearnih jednadžbi Cramerovim pravilom:

$$(a) \quad \begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad (b) \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x + 4y + 6z &= 12 \\ x + 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Rješenje:

(a) Izračunajmo determinantu matrice sustava i determinante D_i za svaki $i = 1, 2, 3$.

Za vježbu, uvjerite se da vrijedi:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz $D = 0$ i $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ proizlazi da zadani sustav može biti rješiv s beskonačno mnogo rješenja ili nerješiv.

Za vježbu, primjenom Gaussove metode i Kronecker-Capellijevog teorema, dokažite da je zadani sustav rješiv s beskonačno mnogo rješenja. Pritom se dobiva da su sve uređene trojke

$$(3\alpha + 2, 1, \alpha)\,, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

rješenja zadanog sustava.

(b) Izračunajmo determinantu matrice sustava i determinante D_i za svaki $i = 1, 2, 3$.

Za vježbu, uvjerite se da vrijedi:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 12 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 12 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz $D = 0$ i $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ proizlazi da zadani sustav može biti rješiv s beskonačno mnogo rješenja ili nerješiv.

Za vježbu, primjenom Gaussove metode i Kronecker-Capellijevog teorema, dokažite da je zadani sustav nerješiv.

10 Sustavi linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice

Podsjetimo se najprije pojma jednakosti i nejednakosti.

Kažemo da se skup dva izraza spojen znakom $=$ naziva *jednakost* i analogno da se skup dva izraza spojen znakom $<$ ili $>$ ili $\leq$ ili $\geq$ ili $\neq$ naziva **nejednakost**.

Ako u linearnoj jednadžbi s dvije nepoznanice $a\,x + b\,y = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$ umjesto jednakosti pišemo jednu od gore navedenih nejednakosti, onda dobivamo linearnu nejednadžbu s dvije nepoznanice.

U nastavku će se zadavati nejednažbe oblika:

$$a\,x + b\,y < c \quad \text{ili} \quad a\,x + b\,y > c \quad \text{ili} \quad a\,x + b\,y \leq c \quad \text{ili} \quad a\,x + b\,y \geq c.$$

- Ako imamo dvije ili više, odnosno m linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice, onda kažemo da je zadan sustav m linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice, a zapisujemo ga kao sustav m linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice, gdje se umjesto jednakosti $(=)$ piše jedna od nejednakosti: $<, >, \leq, \geq$.

Skup rješenja sustava m linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice je skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ (podskup ravnine $\mathbb{R}^2$) svih uređenih parova ravnine $\mathbb{R}^2$ koji zadovoljavaju sve nejednadžbe tog sustava. Pritom se skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ najčešće prikazuje grafički u ravnini $\mathbb{R}^2$.

Podsjetimo se, svaka se linearna jednadžba $a\,x + b\,y = c$ s dvije nepoznanice (x i y) može pisati u obliku implicitne jednadžbe pravca $a\,x + b\,y - c = 0$ ili odgovarajuće eksplicitne jednadžbe pravca $y = -\dfrac{a}{b}\,x + \dfrac{c}{b}$ ako je $b \neq 0$, stoga se skup rješenja svake linearne jednadžbe s dvije nepoznanice grafički prikazuje pripadnim pravcem u ravnini.

Time je grafički prikaz skupa rješenja svake linearne nejednadžbe s dvije nepoznanice zapravo poluravnina omeđena onim pravcem čija se jednadžba dobiva iz zadane nejednadžbe u kojoj se nejednakost zamjenjuje s jednakošću. Pritom ta poluravnina sadrži sve one točke ravnine koje zadovoljavaju zadanu nejednadžbu. Nadalje, primijenjuje se svojstvo da:

- poluravnina sadrži pravac $p \,\ldots\, a\,x + b\,y - c = 0$ ako je nejednadžba oblika:
$$a\,x + b\,y \leq c \quad \text{ili} \quad a\,x + b\,y \geq c\,,$$
- poluravnina ne sadrži pravac $p \,\ldots\, a\,x + b\,y - c = 0$ ako je nejednadžba oblika:
$$a\,x + b\,y < c \quad \text{ili} \quad a\,x + b\,y > c\,.$$

◇ Skup rješenja sustava m linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice grafički se prikazuje presjekom svih pripadnih poluravnina koje su odgovarajući skupovi rješenja linearnih nejednadžbi danog sustava.

Primjer 10.1

Prikažimo grafički skup rješenja linearne nejednadžbe s dvije nepoznanice:

(a) $3x - 4y \leq 5$

(b) $2x + 6y > 8$

Rješenje:

(a) Zapišimo najprije jednadžbu $3x - 4y = 5$ koja odgovara zadanoj nejednadžbi.
Tada iz $3x - 4y = 5$ proizlazi: $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

Ako u ravnini $\mathbb{R}^2$ nacrtamo pravac p čija je eksplicitna jednadžba $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, onda pravac p dijeli ravninu $\mathbb{R}^2$ na dvije poluravnine omeđene tim pravcem.

Za određivanje grafičkog prikaza skupa rješenja zadane nejednadžbe $3x - 4y \leq 5$ odabire se proizvoljna točka $T_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ u ravnini koja ne pripada pravcu $p \ \ldots \ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, a zatim se provjerava zadovoljavaju li njezine koordinate x_1 i y_1 nejednadžbu $3x - 4y \leq 5$.

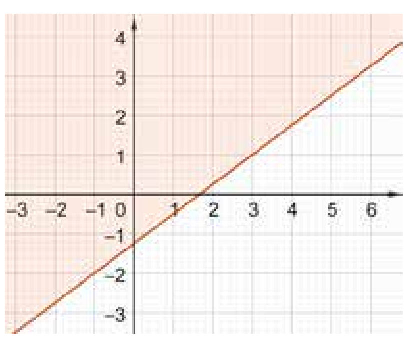
Tada:

- ako koordinate točke T_1 zadovoljavaju zadanu nejednadžbu, onda je skup rješenja zadane nejednadžbe ona poluravnina koja sadrži točku T_1, a
- ako koordinate točke T_1 ne zadovoljavaju zadanu nejednadžbu, onda je skup rješenja zadane nejednadžbe ona poluravnina koja ne sadrži točku T_1.

Dakle, odaberimo npr. točku $T_1 = (1, 0)$ i provjerimo zadovoljavaju li njezine koordinate nejednadžbu $3x - 4y \leq 5$.

Pritom dobivamo: $3 \leq 5$ (istinito),

stoga zaključujemo da je grafički prikaz skupa rješenja nejednadžbe $3x - 4y \leq 5$ ona poluravnina omeđena pravcem $p \ \ldots \ y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ koja sadrži točku $T_1 = (1, 0)$ kako je prikazano na slici 16.



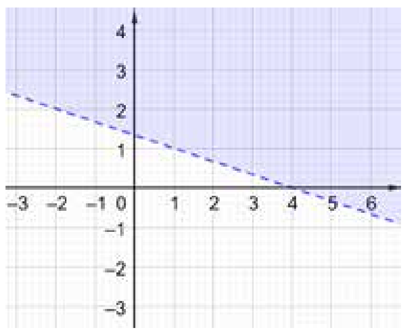
Slika 16: Poluravnina $3x - 4y \leq 5$

Pritom pravac $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ pripada poluravnini $3x - 4y \leq 5$, jer je nejednadžba zadana s nejednakošću "manje ili jednako".

(b) Analogno prethodnom zadatku, zapišimo najprije jednadžbu $2x+6y=8$ koja odgovara zadanoj nejednadžbi $2x+6y>8$.

Tada iz $2x+6y=8$ proizlazi: $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

Nacrtajmo pravac $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ u ravnini $\mathbb{R}^2$ i odaberemo npr. točku $O=(0,0)$ te provjerimo zadovoljavaju li njezine koordinate zadanu nejednadžbu $2x+6y>8$.
Dobivamo: $\quad 0>8 \quad$ (neistinito),
stoga je grafički prikaz skupa rješenja nejednadžbe $2x+6y>8$ ona poluravnina omeđena pravcem $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ koja ne sadrži točku $O=(0,0)$ - vidi sliku 17.



Slika 17: Poluravnina $2x+6y>8$

Pritom pravac $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ ne pripada poluravnini $2x+6y>8$, jer je nejednadžba zadana s nejednakošću "strogo veće".

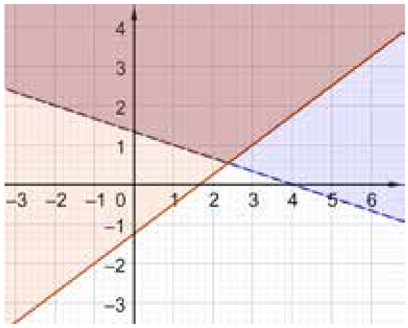
Primjer 10.2

Prikažimo grafički skup rješenja sljedećeg sustava linearnih nejednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 3x-4y & \leq & 5 \\ 2x+6y & > & 8 \end{array}$$

Rješenje:

Obzirom na dobivene grafičke prikaze skupova rješenja nejednadžbi, vidi primjer 10.1, proizlazi da je grafički prikaz skupa rješenja zadanog sustava dio ravnine označen smeđom bojom na slici 18 koji se dobiva presjekom skupa rješenja nejednadžbe $3x-4y\leq 5$ sa skupom rješenja nejednadžbe $2x+6y>8$.



Slika 18: Presjek poluravnina $3x - 4y \leq 5,\ 2x + 6y > 8$

Primjer 10.3

Prikažimo grafički skup rješenja sustava linearnih nejednadžbi:

$$\begin{aligned} x - 2y &< 1 \\ x + y &\leq 5 \\ 3x - 2y &> -8 \end{aligned}$$

Rješenje:

Sustav se sastoji od tri nejednadžbe s dvije nepoznanice. Zapišimo najprije sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ x + y &= 5 \\ 3x - 2y &= -8 \end{aligned} \tag{34}$$

koji odgovara zadanom sustavu nejednadžbi. Tada iz (34) proizlazi:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$y = -x + 5$$

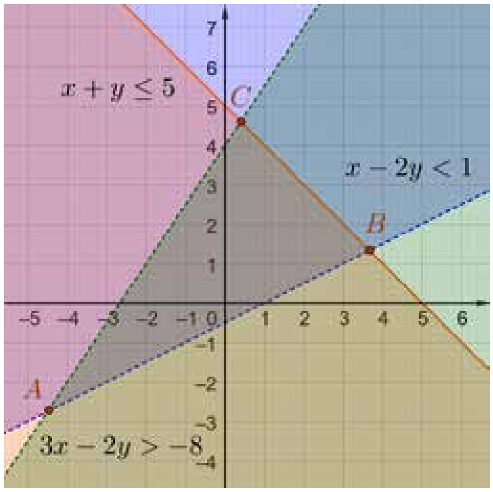
$$y = \frac{3}{2}x + 4.$$

Nadalje, nacrtajmo odgovarajuće pravce u ravnini $\mathbb{R}^2$ i odaberimo točku $O = (0, 0)$, a potom provjerimo zadovoljavaju li njezine koordinate sve tri nejednadžbe zadanog sustava linearnih nejednadžbi. Pritom dobivamo:

$$\begin{aligned} x - 2y &< 1 \\ x + y &\leq 5 \\ 3x - 2y &> -8 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} 0 &< 1 \quad \text{(istinito)}, \\ 0 &\leq 5 \quad \text{(istinito)}, \\ 0 &> -8 \quad \text{(istinito)}. \end{aligned}$$

Grafički prikaz skupa rješenja zadanog sustava nejednadžbi dobiva se presjekom skupa rješenja svih triju nejednadžbi tog sustava, stoga je on dio ravnine omeđen pravcima:

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad y = -x + 5, \quad y = \frac{3}{2}x + 4$$



Slika 19: Presjek poluravnina $x-2y<1,\ x+y\leq 5,\ 3x-2y>-8$

koji sadrži pravac $y=-x+5,$ ali ne sadrži pravac $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ niti pravac $y=\dfrac{3}{2}x+4$ (vidi sliku 19).

Dakle, grafički prikaz rješenja zadanog sustava nejednadžbi je "unutrašnji dio trokuta" $\triangle ABC$ bez spojnica AB i AC, ali s uključenom spojnicom BC, pri čemu točke B i C nisu uključene.

11 Zadaci za vježbu

11.1 Osnove matematičke logike

1. Dokažite da je sljedeća formula valjana formula (tautologija):

   (a) $A \vee \neg A$;
   (b) $\neg(A \wedge \neg A)$;
   (c) $\neg A \to (A \to B)$;
   (d) $(A \wedge (A \to B)) \to B$;
   (e) $((A \to B) \to A) \to A$;
   (f) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$;
   (g) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;
   (h) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

   Rješenje: sve zadane formule su valjane formule.

2. Dokažite da je sljedeća formula valjana formula (tautologija):

   (a) $((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$;
   (b) $((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$;
   (c) $(A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$;
   (d) $(A \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$.

   Rješenje: sve zadane formule su valjane formule.

3. Ispitajte je li formula F ispunjiva, oboriva, tautologija, antitautologija ako je:

   (a) $F \equiv (A \wedge (B \vee A)) \leftrightarrow A$;
   (b) $F \equiv [\neg P \to (Q \vee R)] \to [\neg(P \wedge \neg R)]$;
   (c) $F \equiv (\neg(A \to B)) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$;
   (d) $F \equiv \neg[((A \to B) \wedge (B \to A)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)]$;
   (e) $F \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow [\neg(\neg(\neg A \vee B) \vee (\neg(A \vee \neg B)))]$;
   (f) $F \equiv [(A \wedge C) \to (\neg B)] \to [(B \to (\neg C)) \to A]$;
   (g) $F \equiv \neg[(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)]$;
   (h) $F \equiv [((\neg A \vee B) \wedge C) \to (B \to C)] \vee [(\neg A \to C) \leftrightarrow ((C \wedge (\neg B)) \to A)]$;
   (i) $F \equiv (A \wedge B) \leftrightarrow (\neg(\neg A \vee \neg B))$.

   Rješenje:

   (a) F je tautologija; (b) F je ispunjiva i oboriva; (c) F je tautologija;
   (d) F je antitautologija; (e) F je tautologija; (f) F je ispunjiva i oboriva;
   (g) F je antitautologija; (h) F je tautologija; (i) F je tautologija.

4. Dokažite da vrijedi:

(a) $\{(P \vee Q), (Q \rightarrow (\neg P))\} \models (P \wedge (\neg Q))$;

(b) $\{(\neg Q \wedge P), (\neg P \rightarrow Q)\} \models (Q \leftrightarrow (\neg P \vee Q))$;

(c) $\{\neg Q, (P \vee \neg Q), (\neg Q \rightarrow P)\} \models (P \vee Q)$;

(d) $\{((P \vee Q) \rightarrow R), (Q \rightarrow P), (\neg P \wedge R)\} \models ((P \rightarrow Q) \vee R)$.

5. Dokažite da $F_1 \Rightarrow F_2$, ako su formule F_1 i F_2 zadane na sljedeći način:

(a) $F_1 \equiv A \rightarrow (B \vee C)$ i $F_2 \equiv (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$;

(b) $F_1 \equiv A \rightarrow (B \wedge C)$ i $F_2 \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$;

(c) $F_1 \equiv \neg A$ i $F_2 \equiv A \rightarrow B$;

(d) $F_1 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow A$ i $F_2 \equiv A$.

Rješenje: za sve zadane formule vrijedi $F_1 \Rightarrow F_2$.

6. Dokažite da je $F_1 \Leftrightarrow F_2$ ako je:

(a) $F_1 \equiv A \wedge (B \vee A)$ i $F_2 \equiv A$;

(b) $F_1 \equiv \neg(A \rightarrow B)$ i $F_2 \equiv A \wedge \neg B$;

(c) $F_1 \equiv (A \leftrightarrow B)$ i $F_2 \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$;

(d) $F_1 \equiv \neg(A \vee B)$ i $F_2 \equiv (\neg A \wedge \neg B)$;

(e) $F_1 \equiv \neg(A \wedge B)$ i $F_2 \equiv (\neg A \vee \neg B)$;

(f) $F_1 \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ i $F_2 \equiv A \rightarrow B$;

Rješenje: za sve zadane formule vrijedi da su formule F_1 i F_2 logički ekvivalentne.

7. Ispitajte jesu li formule F_1 i F_2 logički ekvivalentne ako je:

(a) $F_1 \equiv P \rightarrow Q$ i $F_2 \equiv \neg P \vee Q$;

(b) $F_1 \equiv P \wedge Q$ i $F_2 \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

(c) $F_1 \equiv R \vee (\neg P \rightarrow (Q \vee R))$ i $F_2 \equiv (P \vee Q) \vee R$;

(d) $F_1 \equiv (A \rightarrow B) \rightarrow C$ i $F_2 \equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

Rješenje: formule F_1 i F_2 su logički ekvivalentne pod svim oznakama osim pod oznakom (d).

11.2 Skupovi

1. Neka su A, B proizvoljni skupovi. Ispitajte vrijede li sljedeće tvrdnje:

   (a) $B \subseteq A \cup B$;

   (b) $A \cap B \subseteq A$;

   (c) $B \supseteq A \cap B$;

   (d) $A \backslash B \subseteq A$;

   (e) $B \backslash A \subseteq B$.

   Rješenje: vrijede sve tvrdnje.

2. Neka su A, B, C proizvoljni skupovi. Ispitajte vrijede li sljedeće tvrdnje:

   (a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$;

   (b) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$;

   (c) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

   (d) $(A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \backslash C)$.

   Rješenje: vrijede samo prve tri tvrdnje.

3. Ispitajte vrijedi li: $S_1 \subseteq S_2$ ili $S_2 \subseteq S_1$ (podskupovnost skupova S_1 i S_2) ako je:

   (a) $S_1 = (A \backslash B) \backslash C, \quad S_2 = A \backslash (B \backslash C)$;

   (b) $S_1 = (A \backslash B) \backslash C, \quad S_2 = A \backslash (B \cap C)$;

   (c) $S_1 = (A \backslash B) \cap C, \quad S_2 = A \backslash (B \cup C)$.

   gdje su A, B i C proizvoljni skupovi.

   Rješenje: (a) $S_1 \subseteq S_2$; (b) $S_2 \subseteq S_1$;
   (c) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ (S_1 i S_2 su disjunktni skupovi).

4. Neka je U univerzalni skup i neka su A, B proizvoljni skupovi takvi da je $A, B \subseteq U$. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:

   (a) $U \backslash (U \backslash A) = A$;

   (b) $U \backslash (A \cap B) = (U \backslash A) \cup (U \backslash B)$;

   (c) $U \backslash (A \cup B) = (U \backslash A) \cap (U \backslash B)$.

   Rješenje: vrijede sve tvrdnje.

5. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijede De Morganovi zakoni:

   (a) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$;

   (b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

6. Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Dokažite: ako je $X \subseteq Y$, onda je $Y^C \subseteq X^C$.

7. Neka su X i Y proizvoljni skupovi.
   Obrazložite vrijedi li sljedeća jednakost: $(X \cup Y) \cap (X \cup Y^C) = X$.

8. Odredite partitivni skup skupa:

   (a) $A = \{1, \diamond, a\}$;

   (b) $X = \{\emptyset, \Delta, \{2\}\}$;

   (c) $S = \{*, 3, \diamond, x\}$.

9. Odredite sljedeće partitivne skupove:

   (a) $\mathcal{P}(\emptyset)$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$;

   (b) $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\})))$.

10. Neka je zadan skup $A = \{\{a\}, \{b\}\}$. Odredite partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, a potom $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

11. Neka su zadani skupovi $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ i $C = \{0, 4\}$. Odredite:

    (a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A \cap B)$;

    (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A \cup B)$;

    (c) $\mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(A \backslash B)$;

    (d) $\mathcal{P}(B) \backslash \mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B \backslash A)$;

    (e) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(A \cap C)$;

    (f) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(A \cup C)$;

    (g) $\mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(A \backslash C)$;

    (h) $\mathcal{P}(C) \backslash \mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(C \backslash A)$;

    (i) $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(B \cap C)$;

    (j) $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(B \cup C)$;

    (k) $\mathcal{P}(B) \backslash \mathcal{P}(C)$ i $\mathcal{P}(B \backslash C)$;

    (l) $\mathcal{P}(C) \backslash \mathcal{P}(B)$ i $\mathcal{P}(C \backslash B)$.

12. Odredite sve moguće particije skupa:

(a) $S = \{a, b, x\}$;

(b) $A = \{1, \diamond, a\}$;

(c) $X = \{0, 1, \{2\}\}$

(d) $X = \{\emptyset, \diamond, \{5\}, *\}$;

(e) $S = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

13. Odredite kartezijeve produkte $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ i $B \times B$ ako je:

(a) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{a, b\}$;

(b) $A = \{3\}$, $B = \{c, d, 3\}$;

(c) $A = \{\diamond, x, \uparrow, *\}$, $B = \{y, *, \uparrow\}$.

14. Neka su zadani skupovi $A = \{1, 2, 8\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ i $C = \{6, 8\}$.
Odredite sljedeće skupove:

(a) $A \times (B \cap C)$;

(b) $(A \times B) \cap (A \times C)$;

(c) $A \times (B \cup C)$;

(d) $(A \times B) \cup (A \times C)$;

(e) $(A \cap B) \times C$;

(f) $(A \times C) \cap (B \times C)$;

(g) $(A \cup B) \times C$;

(h) $(A \times C) \cup (B \times C)$;

(i) $(A \backslash B) \times C$;

(j) $(A \times C) \backslash (B \times C)$.

15. Neka su A, B, C proizvoljni skupovi. Dokažite da vrijede sljedeće jednakosti:

(a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(c) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$;

(d) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

(e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

16. Neka su A, B, C, D proizvoljni skupovi.

    Dokažite da vrijedi: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

17. Neka su zadani skupovi $A = [3, 5]$, $B = \langle 4, 7 \rangle$, $C = \langle 1, 6]$, $D = \{2, 3, 4\}$.

    Prikažite grafički u koordinatnoj ravnini sljedeće skupove:

    (a) $(A \backslash B) \times (C \backslash B)$;

    (b) $(A \times B) \cap (B \times B)$;

    (c) $((A \cup B) \backslash (B \cap C)) \times C$;

    (d) $((A \cap B) \backslash (B \cup C)) \times (A \backslash B)$;

    (e) $(A \cap B \cap C) \times D$.

11.3 Relacije

1. Ispitajte je li binarna relacija $R \subseteq \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna relacija na skupu $\{0,1,2\}$ ako je:

   (a) $R = \{(1,1),(0,2),(2,1)\}$;
   (b) $R = \{(1,1),(0,2)\}$;
   (c) $R = \{(1,1),(0,2),(2,1),(0,1)\}$;
   (d) $R = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$;
   (e) $R = \{(0,0),(0,1),(1,0),(2,2)\}$.

2. Ispitajte je li binarna relacija $R \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna relacija na skupu $\{1,2,3,4\}$ ako je:

   (a) $R = \{(1,1),(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$;
   (b) $R = \{(1,1),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2),(4,4)\}$;
   (c) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$;
   (d) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2)\}$;
   (e) $R = \{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2)\}$;
   (f) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(3,2),(2,3)\}$.

3. Ispitajte je li binarna relacija R refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna relacija ako je:

   (a) $R \subseteq \{a,b,c,d\} \times \{a,b,c,d\}$, $R = \{(a,a),(b,c),(b,b),(c,a),(c,b),(c,c)\}$;
   (b) $R \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$, $R = \{(a,a),(b,c),(c,b)\}$;
   (c) $R \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$, $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(c,b),(c,a),\}$;
   (d) $R \subseteq \{1,3,5,7\} \times \{1,3,5,7\}$,
   $R = \{(1,5),(7,3),(1,1),(7,7),(3,7),(3,3),(5,5),(3,1),(7,1),(3,5),(7,5)\}$;
   (e) $R \subseteq \{1,3,5,7\} \times \{1,3,5,7\}$,
   $R = \{(5,1),(7,7),(7,3),(1,1),(1,5),(3,7),(1,7),(7,1),(3,3)\}$.

4. Napišite barem dva primjera binarne relacije na skupu $A = \{2,5,6,9\}$ koja:

   (a) je refleksivna i tranzitivna;
   (b) je simetrična, ali nije refleksivna;
   (c) nije antisimetrična niti tranzitivna;
   (d) je tranzitivna, ali nije refleksivna;

(e) je simetrična i refleksivna;
(f) nije simetrična, ali je tranzitivna;
(g) je antisimetrična, ali nije tranzitivna;
(h) je relacija ekvivalencije;
(i) je relacija parcijalnog uređaja.

5. Zadajte neki skup B, a potom napišite barem dva primjera binarne relacije na skupu B koja:

(a) nije refleksivna ni tranzitivna;
(b) nije simetrična, ali je refleksivna;
(c) je antisimetrična i tranzitivna;
(d) nije tranzitivna ni refleksivna;
(e) nije simetrična ni refleksivna;
(f) je simetrična, ali nije tranzitivna;
(g) je antisimetrična, ali nije tranzitivna;
(h) je relacija ekvivalencije;
(i) je relacija parcijalnog uređaja.

6. Ispitajte je li binarna relacija $R \subseteq \mathbb{N}^2$ na skupu $\mathbb{N}$ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna, relacija ekvivalencije, relacija parcijalnog uređaja ako je:

(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je prethodnik od } y\}$;
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je sljedbenik od } y\}$;
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je manji ili jednak od } y\}$;
(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je veći ili jednak od } y\}$;
(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je jednak } y\}$;
(f) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je višekratnik od } y\}$;
(g) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je djeljitelj od } y\}$;
(h) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \text{ je različit od } y\}$.

7. Ispitajte je li binarna relacija R na skupu ljudi (tj. osoba) refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna, relacija ekvivalencije, relacija parcijalnog uređaja ako je relacija R definirana s:

(a) $R \equiv$ ”biti majka”;
(b) $R \equiv$ ”biti brat”.

8. Ispitajte je li binarna relacija R relacija ekvivalencije ili relacija parcijalnog uređaja ako je:

   (a) R relacija $\perp$ ("*biti okomit*") na skupu pravaca u ravnini;

   (b) R relacija $\|$ ("*biti paralelan*") na skupu pravaca u ravnini;

   (c) relacija $R \subseteq \mathbb{N}^2$ na skupu $\mathbb{N}$ definirana s: $x\,R\,y$ ako je $x+y$ paran broj;

   (d) relacija $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ na skupu $\mathbb{Z}$ definirana s:
   $$x\,R\,y \text{ ako } 5 \mid (x-y) \quad (5 \text{ dijeli } (x-y), \text{ odnosno } x-y=5k,\ k \in \mathbb{Z}).$$

9. Napišite barem dvije relacije ekvivalencije na skupu:

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

   (b) $B = \{a, b, c, d\}$;

   (c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

10. Neka je zadan skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i neka je R_1 relacija na skupu S takva da je
    $$R_1 = \{(1,1), (1,5), (2,4), (3,1), (4,4), (5,1), (5,3)\} \subseteq S \times S.$$
    Proširite relaciju R_1 najmanjim mogućim brojem parova $(x, y) \in S \times S$ tako da dobivena relacija $R \subseteq S \times S$ bude relacija ekvivalencije na skupu S.

    Odredite sve klase ekvivalencije relacije R i kvocjentni skup $S/_R$ skupa S modulo R.

    Napišite particiju skupa S koju određuje relacija ekvivalencije R na skupu S.

11. Napišite relaciju ekvivalencije na skupu $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, čije su klase ekvivalencije sljedeći skupovi:

    (a) $\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}$;

    (b) $\{0, 4, 5\}, \{3\}, \{1, 2\}$;

    (c) $\{0, 2\}, \{1\}, \{4\}, \{3, 5\}$;

    (d) $\{0, 1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}$;

    (e) $\{0, 1, 2, 3\}, \{4, 5\}$.

12. Neka je zadan skup $S = \{a, b, c, d\}$. Napišite relaciju ekvivalencije na skupu S koju određuje sljedeća particija $\mathcal{F}(S)$ skupa S ako je:

    (a) $\mathcal{F}(S) = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$;

    (b) $\mathcal{F}(S) = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$;

    (c) $\mathcal{F}(S) = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$;

    (d) $\mathcal{F}(S) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$;

    (e) $\mathcal{F}(S) = \{\{a, b, c, d\}\}$.

13. Neka je zadan skup $S = \{a, b, c\}$. Dokažite da je
$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(a,c),(b,c)\} \subseteq S^2$$
relacija parcijalnog uređaja na skupu S.

14. Napišite barem dvije relacije parcijalnog uređaja na skupu:
    - (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
    - (b) $B = \{a, b, c, d\}$;
    - (c) $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

15. Ispitajte je li $(\mathbb{N}, \geq)$ parcijalno uređen skup obzirom na relaciju $\geq$, a potom je li on i potpuno uređen skup.

16. Neka je A bilo koji proizvoljan skup i neka je $\mathcal{P}(A)$ partitivni skup skupa A.

    Ispitajte je li:
    - (a) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ parcijalno uređen skup obzirom na relaciju $\subseteq$;
    - (b) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ potpuno uređen skup obzirom na relaciju $\subseteq$.

11.4 Funkcije

1. Neka je zadana binarna relacija R na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Ispitajte je li relacija $R \subseteq A^2$ funkcija ako je:

   (a) $x\,R\,y \quad\Leftrightarrow\quad y - x = 1;$
   (b) $x\,R\,y \quad\Leftrightarrow\quad |y - x| = 1;$
   (c) $x\,R\,y \quad\Leftrightarrow\quad y = x.$

   Rješenje: (a) R nije totalna relacija; (b) R nije funkcijska relacija;
   (c) R je funkcija.

2. Neka je zadana binarna relacija $R \subseteq A \times B$, gdje je $A = \{Iva, Marko, Ana\}$ skup osoba, a $B = \{101, 102, 103\}$ skup soba u hotelu.
   Ispitajte je li relacija R funkcija ako je:

   (a) $R = \{(Iva, 101), (Iva, 102), (Marko, 102), (Ana, 103)\};$
   (b) $R = \{(Iva, 101), (Marko, 101)\};$
   (c) $R = \{(Iva, 101), (Marko, 101), (Ana, 103)\}.$

   Rješenje: (a) R nije funkcijska relacija; (b) R nije totalna relacija;
   (c) R je funkcija.

3. Zadajte dva skupa A i B i relaciju $R \subseteq A \times B$, tako da relacija na $A \times B$:

   (a) nije totalna relacija;
   (b) nije funkcijska relacija;
   (c) nije funkcija;
   (d) je funkcija.

4. Argumentirajte neki primjer relacije na skupu N tako da relacija:

   (a) $R_1 \subseteq \mathbb{N}^2$ je funkcija;
   (b) $R_2 \subseteq \mathbb{N}^2$ nije funkcija;
   (c) $R_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ nije totalna relacija;
   (d) $R_4 \subseteq \mathbb{R}^2$ nije funkcijska relacija.

   Rješenje: navodimo u svim oznakama jedan od mogućih primjera:
   (a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 3x - 2\};$
   (b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 + y^2 < 14\};$
   (c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + y \geq 10\};$
   (d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y = 0 \ \vee \ x + y = 5\}.$

5. Argumentirajte jesu li jednake funkcije f i g ako je:

(a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x - 4,$ $\quad g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ g(x) = x - 4;$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 5,$ $\quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 5;$

(c) $f(x) = 5^{\log_5(3x-4)},$ $\quad g(x) = 3x - 4;$

(d) $f(x) = \ln(e^{2x^2+7}),$ $\quad g(x) = 2x^2 + 7;$

(e) $f(x) = \ln(e^{x-3}),$ $\quad g(x) = x - 3;$

(f) $f(x) = \ln \dfrac{2x+5}{3x-4},$ $\quad g(x) = \ln(2x + 5) - \ln(3x - 4);$

(g) $f(x) = \log[(7x + 4)(5x - 2)],$ $\quad g(x) = \log(7x + 4) + \log(5x - 2).$

Rješenje: (a) $f \neq g$; (b) $f \neq g$; (c) $f \neq g$; (d) $f = g$; (e) $f = g$; (f) $f \neq g$; (g) $f \neq g$.

Komentar: ponovimo svojstva logaritamske funkcije, gdje je $a > 0,\ a \neq 1$:

$$a^{\log_a x} = x,\quad \log_a a^x = x,\quad \log_a a = 1,\quad \log_a 1 = 0,$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,\quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,\quad \log_a x^n = n \log_a x,$$

ako je $a = e$, onda je $\ln x = \log_e x$; ako je $a = 10$, onda je $log\, x = \log_{10} x$.

6. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije realne varijable ako je:

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 11;$

(b) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3};$

(c) $f(x) = \ln(x + 2) + \dfrac{\cos x}{4x - 8};$

(d) $f(x) = \log_2(3x - 1) + \dfrac{\sin x}{2x + 4};$

(e) $f(x) = 7x - \dfrac{2}{x-1} + 3\sqrt{7x + 1};$

(f) $f(x) = \ln(7x - 4) + \sqrt{x + 1}.$

Rješenje: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$; (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{2}\}$; (c) $\mathcal{D}(f) = \langle -2, +\infty\rangle \backslash \{2\}$; (d) $\mathcal{D}(f) = \langle \frac{1}{3} + \infty\rangle$; (e) $\mathcal{D}(f) = [-\frac{1}{7} + \infty\rangle \backslash\{1\}$; (f) $\mathcal{D}(f) = \langle \frac{4}{7} + \infty\rangle$.

7. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije realne varijable ako je:

(a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{6}{2x-5}} + \sin(x - 2) + \ln(x - 3);$

(b) $f(x) = \log(x+3) + \sqrt{\dfrac{4}{2x+5}} + \cos(x+2)$.

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{7x-1}{4x+3}} + 2 + \dfrac{\cos x}{(x-2)^2}$.

Rješenje: (a) $\mathcal{D}(f) = \langle 3 + \infty\rangle$; (b) $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\frac{5}{2} + \infty\right\rangle$;
(c) $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\infty, -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right\rangle \setminus \{2\}$.

8. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije realne varijable ako je:

(a) $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2-5x+6}$;

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+9} + 8x^3 - 12x^2 - 5x + 79$;

(c) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + 8x^3 - 12x^2 - 5x + 79$;

(d) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$;

Rješenje: (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$; (b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$;
(c) $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -3] \cup [3, +\infty\rangle$;
(d) $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -1] \cup [3, +\infty\rangle$.

9. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije realne varijable ako je:

(a) $f(x) = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{x^2-1}$;

(b) $f(x) = \ln(4x-8) + \dfrac{1}{-x^2+9}$;

(c) $f(x) = \sqrt{-2x^2+8} + \dfrac{1}{3x-3}$;

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \dfrac{1}{2x-8}$;

(e) $f(x) = \dfrac{\log(x^2-4)}{2x+6}$;

(f) $f(x) = \dfrac{\log_7(2x-5)}{\sqrt{9-x^2}}$;

(g) $f(x) = \dfrac{2\log(x^2-5x+6)}{\frac{x}{2}-2}$.

Rješenje: (a) $\mathcal{D}(f) = \langle -2, +\infty\rangle \setminus \{-1, 1\}$; (b) $\mathcal{D}(f) = \langle 2, +\infty\rangle \setminus \{3\}$;
(c) $\mathcal{D}(f) = [-2, 2] \setminus \{1\}$; (d) $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \setminus \{4\}$;
(e) $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle \setminus \{-3\}$; (f) $\mathcal{D}(f) = \left\langle \frac{5}{2}, 3\right\rangle$;
(g) $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 2\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle \setminus \{4\}$.

10. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije realne varijable ako je:

$$(a)\quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{4x+8} + \log_2(2x+6);$$

$$(b)\quad f(x) = \frac{\log(x^2+3x)}{3x-9} + \sqrt{2x-3};$$

$$(c)\quad f(x) = \frac{\sin(x-1)\cdot\log_2(x^2-4)}{\sqrt{-3x^2+5x+12}} + 4x^3 + 2x^2 - 24.$$

Rješenje: (a) $\mathcal{D}(f) = \langle -3, -2\rangle \cup [0, +\infty\rangle$; (b) $\mathcal{D}(f) = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle \setminus \{3\}$;
(c) $\mathcal{D}(f) = \langle 2, 3\rangle$.

11. Zadani su skupovi $A = \{x, y, z, w\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ i funkcija $f\colon A \to B$ tako da vrijedi

$$f(x) = 3,\ f(y) = 2,\ f(z) = 1,\ f(w) = 2.$$

Ispitajte je li funkcija f surjekcija, injekcija, bijekcija.

12. Argumentirajte je li $f\colon S \to \mathbb{N}$ funkcija ako f svakom građaninu Republike Hrvatske pridružuje broj osobne iskaznice; uz pretpostavku da je f funkcija, argumentirajte je li f bijekcija.

13. Argumentirajte je li $f\colon S \to \mathbb{N}$ funkcija ako f svakom građaninu Republike Hrvatske pridružuje OIB; uz pretpostavku da je f funkcija, argumentirajte je li f surjekcija, injekcija, bijekcija.

14. Argumentirajte je li relacija $R \subseteq A \times B$ funkcija ako je A skup klijenata neke banke, B skup *PIN*-ova svih kartica računa te banke i vrijedi:

$$(a, b) \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \text{osoba } a \text{ ima karticu čiji je } PIN\ b.$$

Uz pretpostavku da je f funkcija, argumentirajte je li f surjekcija, injekcija, bijekcija.

15. Odredite područje vrijednosti $Im\,f$ realne funkcije realne varijable i provjerite je li funkcija f injekcija, surjekcija, bijekcija ako je:

(a) $f(x) = x - 4$;

(b) $f(x) = 4x + 3$;

(c) $f(x) = 2x^3 - 5$;

(d) $f(x) = x^2 - x - |x|^2$;

$$(e)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{ako je } x \neq 0, \\ 0 & \text{ako je } x = 0; \end{cases}$$

(f) $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Rješenje: (a) $Im\, f = \mathbb{R}$; f je bijekcija. (b) $Im\, f = \mathbb{R}$; f je bijekcija.

(c) $Im\, f = \mathbb{R}$; f je bijekcija.

(d) Uočite da je $|x|^2 = x^2$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, stoga je $f(x) = -x$.

$Im\, f = \mathbb{R}$; f je bijekcija.

(e) $Im\, f = \mathbb{R}$; f je bijekcija;

(f) Zadana funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$ može se pisati u obliku

$$f(x) = (x+1)^2 + 1,$$

odakle slijedi da je točka $T = (-1, 1)$ tjeme parabole i da je parabola otvorom okrenuta prema pozitivnom dijelu y-osi $(a = 1 > 0)$.

⊚ Ispitivanje injektivnosti:

treba provjeriti vrijedi li za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ da iz

$f(x_1) = f(x_2)$ proizlazi $x_1 = x_2$.

Dakle iz $f(x_1) = f(x_2)$ proizlazi:

$$\begin{aligned} (x_1+1)^2 + 1 &= (x_2+1)^2 + 1 \\ (x_1+1)^2 &= (x_2+1)^2 \\ x_1 + 1 &= \pm(x_2+1) \end{aligned}$$

odakle slijedi da je $x_1 = x_2 \;\vee\; x_1 = -x_2 - 2$.

Time funkcija f nije injekcija (jer nismo dobili jedinstveni $x_1 = x_2$).

⊚ Ispitivanje surjektivnosti:

obzirom na parabolu $y = (x+1)^2 + 1$ direktno proizlazi da je

$Im\, f = [1, +\infty\rangle \subseteq \mathbb{R}$, gdje je $Im\, f \neq \mathcal{K}(f)$, jer je $\mathcal{K}(f) = \mathbb{R}$,

stoga f nije surjekcija.

Zaključujemo da f nije bijekcija.

Primijetimo, zadana funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 2$ je bijekcija jedino ako je $\mathcal{K}(f) = Im\, f = [1, +\infty\rangle \;\wedge\; (\mathcal{D}(f) = [-1, +\infty\rangle \;\vee\; \mathcal{D}(f) = \langle -\infty, -1])$.
Drugim riječima, funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 2$ je bijekcija jedino ako je $f\colon [-1, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle$ ili $f\colon \langle -\infty, -1] \to [1, +\infty\rangle$.

16. Ispitajte jesu li sljedeće funkcije injekcija, surjekcija, bijekcija ako je:

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\quad f(x) = -x$;

(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $\quad g(x) = x - 4$;

(c) $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\quad h(x) = \dfrac{x}{2x+1}$;

(d) $j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $j(x) = x^2$.

Rješenje: (a) f je injekcija, nije surjekcija, nije bijekcija;
(b) g je injekcija, surjekcija i bijekcija;
(c) h je injekcija, nije surjekcija, nije bijekcija;
(d) j nije injekcija, nije surjekcija, nije bijekcija.

17. Ispitajte jesu li sljedeće funkcije injekcija, surjekcija, bijekcija ako je:

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2016x - (x - 2017)$;
(b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x^2 + 3$;
(c) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_0^+$, $h(x) = x^2 - 1$, gdje je $\mathbb{Z}_0^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$;
(d) $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $j(x) = 4 - x^2$;
(e) $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k(x) = x^2 - 4x + 4$.

18. Navedite i argumentirajte primjer funkcije:

(a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja je injekcija i nije surjekcija;
(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ koja je surjekcija i nije injekcija;
(c) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ koja nije injekcija ni surjekcija;
(d) $j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ koja nije bijekcija;
(e) $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja je bijekcija.

19. Argumentirajte postoje li za funkcije $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sljedeće kompozicije funkcija $f \circ f$, $g \circ f$, $f \circ g$ i $g \circ g$ uz pretpostavku da je $Im\, f = \mathbb{R}$ i $Im\, g = \mathbb{N}$.

Rješenje: Primijetimo da je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{Q}$ područje definicije funkcije f i da je $\mathcal{D}(g) = \mathbb{Z}$ područje definicije funkcije g te da je $Im\, f = \mathbb{R}$, $Im\, g = \mathbb{N}$.
Zaključujemo:

$Im\, f \not\subseteq \mathbb{Q}$, stoga kompozicija $f \circ f$ nije definirana;
$Im\, f \not\subseteq \mathbb{Z}$, stoga kompozicija $g \circ f$ nije definirana;
$Im\, g \subseteq \mathbb{Q}$, stoga kompozicija $f \circ g$ je definirana;
$Im\, g \subseteq \mathbb{Z}$, stoga kompozicija $g \circ g$ je definirana.

20. Neka su zadane funkcije $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$ i $g(x) = \dfrac{1}{4x}$ tako da su kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ definirane. Ispitajte vrijedi li $g \circ f = f \circ g$.

21. Neka su zadane funkcije $f(x) = x^4$ i $g(x) = \sqrt{x}$ tako da su kompozicije $g \circ f$ i $f \circ g$ definirane. Odredite kompoziciju funkcija $g \circ f$ i $f \circ g$.

22. Neka su zadane funkcije $f(x) = x^2 + 2x + 1$ i $g(x) = \sqrt{x-2}$ tako da su kompozicije $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$ definirane. Odredite kompozicije funkcija $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$.

23. Odredite kompozicije funkcija $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ i $g \circ g$ uz pretpostavku da su one definirane ako je:

    (a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2^x$;

    (b) $f(x) = e^{x-1}$, $g(x) = 2x + 1$.

24. Odredite prirodno područje definicije realne funkcije f ako je:

    (a) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-4} + \sqrt{(g \circ h)(x)}$ gdje je $g(x) = x^2 + x + 6$, $h(x) = x + 1$;

    (b) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2-9)}{x^2-4} + \sqrt{(g \circ h)(x)}$ gdje je $g(x) = -x^2 - x - 6$, $h(x) = x + 1$;

    (c) $f(x) = \dfrac{\cos(x^2-16)}{x^2-9} + \ln((g \circ h)(x))$ gdje je $g(x) = -x^2 + 7x - 6$, $h(x) = x + 2$.

    Pritom se podrazumijeva da je definirana kompozicija $g \circ h$.

25. Odredite inverznu funkciju funkcije f ako je:

    (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x - 7$;

    (b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 4x^3 + 2$;

    (c) $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $f(x) = x^2$;

    (d) $f\colon \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}_0^+$ $f(x) = x^2$.

26. Neka su zadane funkcije $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    (a) $f(x) = 2x + 5$ i $g(x) = \sqrt[5]{4x-5}$;

    (b) $f(x) = 3x - 7$ i $g(x) = \sqrt[5]{2x+6}$.

    Odredite funkciju $h = g \circ f$. Dokažite da je funkcija h bijekcija i odredite $h^{-1}(x)$.

27. Neka su zadane funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$.

    Argumentirajte postoji li inverzna funkcija funkcije g i jesu li dobro definirane kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$, a potom, ako je moguće, odredite sva rješenja jednadžbe:

    (a) $g^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$;

    (b) $g^{-1}(x) = (g \circ f)(x)$.

Rješenje:

Funkcija g je bijekcija, stoga postoji inverzna funkcija funkcije g te je:

$g^{-1}(x) = x - 2$ (dokazati za vježbu).

Uvjerite se da je $Im\, f = \left[-\frac{25}{4}, +\infty\right\rangle$, $Im\, g = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$.

(a) $Im\, g \subseteq \mathcal{D}(f)$, stoga je definirana kompozicija $f \circ g$. Time je jednadžba $g^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$ dobro zadana, a njezino jedino rješenje je: $x = -4$.

(b) $Im\, f \subseteq \mathcal{D}(g)$, stoga je definirana kompozicija $g \circ f$. Time je jednadžba $g^{-1}(x) = (g \circ f)(x)$ dobro zadana, a njezino jedino rješenje je: $x = -2$.

28. Neka su zadane funkcije $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ i $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 5$.

Argumentirajte postoji li inverzna funkcija funkcije g i jesu li dobro definirane kompozicije $f \circ g$ i $g \circ f$, a potom, ako je moguće, odredite sva rješenja jednadžbe:

(a) $g^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$;

(b) $g^{-1}(x) = (g \circ f)(x)$.

Rješenje:

Funkcija g je bijekcija, stoga postoji inverzna funkcija funkcije g te je:

$g^{-1}(x) = x + 5$ (dokazati za vježbu).

Uvjerite se da je $Im\, f = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right\rangle$, $Im\, g = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$.

(a) $Im\, g \subseteq \mathcal{D}(f)$, stoga je definirana kompozicija $f \circ g$. Time je jednadžba $g^{-1}(x) = (f \circ g)(x)$ dobro zadana, a njezina rješenja su:
$x_1 = 4 - \sqrt{11}$, $x_2 = 4 + \sqrt{11}$.

(b) $Im\, f \subseteq \mathcal{D}(g)$, stoga je definirana kompozicija $g \circ f$. Time je jednadžba $g^{-1}(x) = (g \circ f)(x)$ dobro zadana, a njezina rješenja su:
$x_1 = -1 - \sqrt{11}$, $x_2 = -1 + \sqrt{11}$.

29. Odredite prirodno područje definicije i područje vrijednosti realne funkcije realne varijable tako da ona bude bude bijekcija, a potom odredite njezinu inverznu funkciju:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

(b) $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 3}$;

(c) $f(x) = x^3$;

(d) $f(x) = x^3 - 2$;

(e) $f(x) = (x - 2016)^{2017}$;

(f) $f(x) = (7x+3)^5 - 4$;

(g) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{5x-3}{2x-1}}$;

(h) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{2x+1}{3x+5}}$.

Rješenje:

(a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$;

(b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $\quad f^{-1}(x) = -\dfrac{3x+5}{x-2}$;

(c) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$;

(d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$;

(e) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[2017]{x} + 2016$;

(f) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}$, $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt[5]{x+4}-3}{7}$;

(g) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right\}$, $\quad f^{-1}(x) = \dfrac{x^3-3}{2x^3-5}$;

(h) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{5}{3}\right\}$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}\backslash\left\{\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right\}$, $\quad f^{-1}(x) = -\dfrac{5x^5-1}{3x^5-2}$.

30. Odredite prirodno područje definicije i područje vrijednosti realne funkcije realne varijable tako da ona bude bude bijekcija i odredite njezinu inverznu funkciju ako je:

(a) $f(x) = x^2$;

(b) $f(x) = x^2 + 1$;

(c) $f(x) = x^2 + 5x + 6$;

(d) $f(x) = -x^2 + 6x - 11$.

Rješenje:

(a) Tjeme parabole je u točki $T = (0,0)$ i parabola je okrenuta otvorom prema pozitivnom dijelu y-osi. Moguća su dva rješenja:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}_0^+$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ili
2. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^-$, $\quad Im\, f = \mathbb{R}_0^+$, $\quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$,

gdje je $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty\rangle$, $\mathbb{R}_0^- = \langle -\infty, 0]$.

(b) Tjeme parabole je u točki $T = (0,1)$ i parabola je okrenuta otvorom prema pozitivnom dijelu y-osi. Moguća su dva rješenja:

1. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^+$, $\quad Im\, f = [1, +\infty\rangle$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$ ili

2. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}_0^-$, $\quad Im\, f = [1, +\infty\rangle$, $\quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$.

(c) Tjeme parabole je u točki $T = (-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$ i parabola je okrenuta otvorom prema pozitivnom dijelu y-osi. Moguća su dva rješenja:

1. $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\infty, -\frac{5}{2} \right]$, $Im\, f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right\rangle$,
   $f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}$ ili
2. $\mathcal{D}(f) = \left[-\frac{5}{2}, +\infty \right\rangle$, $Im\, f = \left[-\frac{1}{4}, +\infty \right\rangle$,
   $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2}$.

(d) Tjeme parabole je u točki $T = (3, -2)$ i parabola je okrenuta otvorom prema negativnom dijelu y-osi. Moguća su dva rješenja:

1. $\mathcal{D}(f) = \langle -\infty, 3]$, $Im\, f = \langle -\infty, -2]$,
   $f^{-1}(x) = \sqrt{-x-2} + 3$ ili
2. $\mathcal{D}(f) = [3, +\infty\rangle$, $\quad Im\, f = \langle -\infty, -2]$,
   $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x-2} + 3$.

Za vježbu: uvjerite se da je u svim slučajevima funkcija f bijekcija.

11.5 Matematička indukcija

1. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

   (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

   (b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

   (c) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$;

   (d) $2 + 16 + 56 + \cdots + (3n-2) \cdot 2^n = 10 + (3n-5) \cdot 2^{n+1}$;

   (e) $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n+2) = \dfrac{n(3n+7)}{2}$.

2. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

   (a) $-3 + 3 + 9 + \cdots + (6n-9) = 3n^2 - 6n$;

   (b) $-1 + 3 + 7 + \cdots + (4n-5) = n(2n-3)$;

   (c) $-3 - 7 - 11 - \cdots - (4n-1) = -n(2n+1)$;

   (d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

3. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

   (a) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \dfrac{n(n+1)}{2}$;

   (b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   (c) $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3}$;

   (d) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \cdots + (n+1) \cdot n^2 = \dfrac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$.

4. Dokažite da vrijedi $\left(\dfrac{n}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n^3}{6}\right) \in \mathbb{N}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

5. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

   (a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$;

   (b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \cdots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$;

(c) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n}=\dfrac{n-1}{n}$;

(d) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

6. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ vrijedi:
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n-1}{n}.$$

7. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi:
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}.$$

8. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ vrijedi sljedeća nejednakost:
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

9. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da vrijedi sljedeća nejednakost:

(a) $2^n>(2n+1)$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$;

(b) $2^n>5n$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 5$;

(c) $2^n>n^2$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 5$;

(d) $3^n>(2^n+3n)$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$;

(e) $2^n>10n^2$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 10$;

(f) $3^n>n^4$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n>7$;

(g) $n^3>(3n+3)$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n>2$.

10. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n\in\mathbb{N}$ vrijedi sljedeća nejednakost ako je:

(a) $n<2^n$;

(b) $n!\geq 2^{n-1}$.

(c) $2^n<n!$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 4$;

(d) $(2n)!>3^n(n!)^2$ za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 5$.

Komentar: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$ ($n!$ čitamo: en-faktorijela).

11. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

(a) $2 \mid (n^2 + n)$;
(b) $3 \mid (n^3 + 2n)$;
(c) $6 \mid (n^3 + 11n)$;
(d) $11 \mid (23^n - 1)$;
(e) $5 \mid (2^{8n+6} + 1)$.

12. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

(a) $7 \mid (6^{2n-1} + 1)$;
(b) $10 \mid (3^{4n+2} + 1)$;
(c) $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$;
(d) $7 \mid (11^n - 4^n)$;
(e) $57 \mid (7^{n+2} + 8^{2n+1})$.

13. Koristeći se metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

(a) $12 \mid (3^{2n} + 15)$;
(b) $9 \mid (4^n + 15n - 1)$;
(c) $17 \mid (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2})$;
(d) $8 \mid (11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6)$;
(e) $37 \mid (2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1})$.

11.6 Matrice i determinante

1. Izračunajte $2\,\mathbf{A}+\dfrac{1}{3}\,\mathbf{B}-\mathbf{C}$ ako je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -3 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 12\\ 21 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}10 & 8 & 5\\ -7 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{bmatrix}-9 & 2 & -5\\ 8 & \frac{7}{3} & 3\end{bmatrix}$.

2. Izračunajte $3\,\mathbf{A}+\dfrac{1}{2}\,\mathbf{B}$ ako je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2 & -10\\ -8 & -4 & 0 & -6\\ -2 & 2 & -4 & 6\end{bmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

3. Izračunajte $\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}-\mathbf{C}$ ako je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 6 & 4\\ 0 & -5 & 1\\ -3 & 4 & 8\end{bmatrix}.$$

Rješenje: $\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

4. Izračunajte $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ i $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ ako je: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$

Rješenje: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix};\ \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-11 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}.$

5. Izračunajte $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\ 5 & 2 & 7\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}.$

Rješenje: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

6. Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Izračunajte:

   (a) $2\,\mathbf{A} + \mathbf{B}^T$,

   (b) $\mathbf{A}^T - 2\,\mathbf{B}$.

   Rješenje: (a) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

7. Za zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

   i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ izračunajte:

   (a) $(3\,\mathbf{A} - 5\,\mathbf{C}^T) + (4\,\mathbf{B} - 2\,\mathbf{D}^T)$;

   (b) $2\,\mathbf{A}^T - 4\,\mathbf{B}^T + 3(-2\,\mathbf{C} + 5\,\mathbf{D})$.

8. Izračunajte sljedeće produkte matrica:

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$;

   (c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$;

   (e) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ (b)\ \begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix};\ (c)\ \begin{bmatrix} 16 & -35 & 16 \\ -7 & -2 & 7 \\ 9 & -11 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix};\ (e)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Kakva je matrica $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ ako je:

$$(a)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$(a)\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 12 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{je gornja trokutasta matrica;}$$

$$(b)\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{je simetrična matrica.}$$

10. Izračunajte sljedeće produkte matrica:

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix};$$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: (a) $\begin{bmatrix} 13 & 8 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 12 & -17 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 22 & 5 \\ 6 & 3 & 12 & 2 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 27 \end{bmatrix}$.

11. Izračunajte sljedeće produkte matrica:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Rješenje: (a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 19 & 23 \\ 17 & 23 & 27 & 35 \\ 16 & 12 & 9 & 20 \\ 7 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -5 & -10 \\ 7 & 7 & 7 & 7 \\ 10 & 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$.

12. Za zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ i

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ odredite sve moguće produkte dviju matrica.

Rješenje:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}4&-2&0\\1&1&-15\end{bmatrix};\ \mathbf{BC}=\begin{bmatrix}11&5\\6&22\end{bmatrix};\ \mathbf{BD}=\begin{bmatrix}-2&8&-5\\-40&5&-4\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{CB}=\begin{bmatrix}14&-6&-10\\1&-1&5\\-4&0&20\end{bmatrix};\ \mathbf{CA}=\begin{bmatrix}10&6\\3&-3\\4&-12\end{bmatrix};\ \mathbf{DC}=\begin{bmatrix}5&-9\\14&-26\\48&12\end{bmatrix}.$$

13. Neposrednim množenjem uvjerite se da vrijedi $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ ako je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&-1&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix}.$$

14. Neposrednim množenjem uvjerite se da vrijedi $(\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ ako je:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-1\\3&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&1&3\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3&1\\2&1\\-2&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

15. Neka su zadane matrice:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&-1&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&2\\1&-1\end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&0&2\\2&-1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&1&2\\-1&0&4\end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\mathbf{AB}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, $\mathbf{BA}$.

16. Za zadane matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-1&2\\-1&0&2\\2&-1&1\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\3&1&2\\-1&0&4\end{bmatrix}$ izračunajte $3\,\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T-5\,\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

17. Izračunajte $(2\,\mathbf{A}^T+\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}$ ako je: $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&4\\-1&-1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&0\\1&5\\2&-2\end{bmatrix}$.

18. Neka su zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    Izračunajte $-4(\mathbf{AB})^T$ i $2(\mathbf{BA})^T$.

19. Izračunajte $\mathbf{A}^2$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & 4 & -5 \\ -6 & -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

20. Pokažite da matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ zadovoljava jednadžbu

$$\mathbf{A}^2 - (a+d)\,\mathbf{A} + (ad-bc)\,\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

    gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica, a $\mathbf{O}$ nul-matrica reda 2.

21. Izračunajte $\mathbf{A}^2 - 4\,\mathbf{A} + 5\,\mathbf{I}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda 2.

22. Neka je $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$. Odredite $f(\mathbf{A})$ ako je:

    (a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

    (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$;

    (c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    Rješenje: (a) $f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 28 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$; (b) $f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$;

    (c) $f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

23. Odredite $f(\mathbf{A})$ ako je:

    (a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5,\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$;

    (b) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5,\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $(a)\ \ f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$; $(b)\ \ f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

24. Provjerite vrijedi li $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ (gdje je $\mathbf{O}$ nul-matrica reda 3) ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

i $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 4$.

25. Neka su zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Odredite matricu $\mathbf{X}$ za koju vrijedi da je:

(a) $2\,\mathbf{A} + 3\,\mathbf{X} = \mathbf{I}$;

(b) $3\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Pritom $\mathbf{I}$ označava jediničnu matricu reda 2.

Rješenje: $(a)\ \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $(b)\ \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{11}{2} \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

26. Za zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

odredite matricu $\mathbf{X}$ tako da vrijedi $5\,\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B} + 4\,\mathbf{X} = 6\,\mathbf{C} - 3\,\mathbf{A}$.

27. Za zadane matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

odredite matricu $\mathbf{X}$ tako da vrijedi $\mathbf{A} + 2\,\mathbf{B} - 3\,\mathbf{X} + 5\,\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{I}$.

Pritom $\mathbf{I}$ označava jediničnu matricu reda 2.

28. Izračunajte determinantu drugog reda ako je:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} -3+4i & 2-3i \\ 3-2i & 1-5i \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 2-5i & 5 \\ -3i & -6+2i \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 2a-b & a+b \\ a-b & 2a+b \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} \dfrac{1+a^2}{1-a^2} & \dfrac{2a-2}{1+a^2} \\ \dfrac{1+a}{1+a^2} & -\dfrac{1-a^2}{1+a^2} \end{vmatrix}$;

(f) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}$;

(g) $\begin{vmatrix} 2\cos x & 2\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

Rješenje: (a) -46; (b) $17+32i$; (c) $-2+49i$; (d) $3a^2$; (e) $\frac{1-a^2}{1+a^2}$; (f) 1; (g) $2\cos 2x$.

29. Riješite sljedeće jednadžbe:

(a) $\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = 0$;

(b) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ 4-3\lambda & -5 \end{vmatrix} = 115$;

(c) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3\lambda^2-4\lambda \\ \lambda & \lambda+1 \end{vmatrix} = 1+6\lambda^2$.

Rješenje: (a) $x_1=-1,\ x_2=4$; (b) $\lambda_1=-5,\ \lambda_2=8$; (c) $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1$.

30. Primjenom Sarrusovog pravila izračunajte sljedeće determinante trećeg reda:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

Rješenje: (a) -2; (b) -7; (c) 0; (d) 4.

31. Primjenom Laplaceovog razvoja izračunajte sljedeće determinante trećeg reda:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix};$$

$$(c)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$(d)\quad \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Rješenje: (a) -96; (b) 0; (c) $(b-a)(c-a)(c-b)$; (d) $-2(x^3+y^3)$.

32. Primjenom Laplaceovog razvoja izračunajte sljedeće determinante četvrtog reda:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(c)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(d)\quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$(e)\quad \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: (a) 81; (b) 0; (c) 12; (d) 75; (e) 102.

33. Primjenom Laplaceovog razvoja izračunajte sljedeće determinante:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix};$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(c)\quad \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

Rješenje: (a) $abcd$; (b) $abcd$; (c) $xyzuv$.

34. Izračunajte sljedeće determinante:

$$(a)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(b)\quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(c)\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(d)\quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(e)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: (a) 1; (b) 9; (c) 0; (d) 1; (e) -3.

35. Izračunajte sljedeće determinante:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Rješenje: (a) -3; (b) -8; (c) -80; (d) 40.

36. Izračunajte:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$.

Rješenje: (a) -24; (b) -200; (c) 42.

37. Izračunajte:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

$$(b)\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Rješenje: (a) 115; (b) -12; (c) 8.

38. Riješite sljedeću jednadžbu:

$$(a)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$(b)\ \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ x & x & x+1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$(c)\ \begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 2+x & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$(d)\ \begin{vmatrix} 1 & -x & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 1;$$

$$(e)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0;$$

$$(f)\ \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

Rješenje: (a) $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; (b) $x = 2$; (c) $x = 1$;
(d) $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{3}{2}$; (e) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$;
(f) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 4$.

39. Izračunajte inverznu matricu matrice $\mathbf{A}$:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$;

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$.

40. Izračunajte inverznu matricu matrice $\mathbf{A}$:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$;

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$;

(g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

(h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$;

41. Odredite inverznu matricu matrice $\mathbf{A}$:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

42. Primjenom Gauss-Jordanove metode odredite inverznu matricu matrice $\mathbf{A}$:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(f)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

43. Izračunajte $\mathbf{D}^{-1}$ ako je $\mathbf{D}=\mathbf{A}+2\,\mathbf{B}-\mathbf{C}$ i

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\0&1&3\\3&0&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-3&2&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&6&4\\0&-5&1\\-3&4&8\end{bmatrix}.$$

44. Izračunajte $\mathbf{C}^{-1}$ ako je $\mathbf{C}=\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ i

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&1&1\\2&1&0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-2&0\\2&3&4\end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\1&0&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1&2\\-3&-3&4\\-2&-2&3\end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&8&-4\\6&9&-5\\4&7&-3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&2&5\\4&-1&3\\9&6&5\end{bmatrix}.$$

45. Izračunajte $\mathbf{C}^{-1}$ ako je $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{T}\,\mathbf{B}$ i

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&2&3\\4&-5&2\\-2&3&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&2\end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-2&-1\\4&-1&-3\\2&-1&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}.$$

46. Izračunajte $\mathbf{D}^{-1}$ ako je $\mathbf{D}=\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}$ i

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&4\\5&7\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}.$$

47. Neposrednim množenjem uvjerite se da vrijedi $(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

48. Izračunajte matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ i $\mathbf{D} = \mathbf{B}\,\mathbf{A}$, a potom $\mathbf{C}^{-1}$ i $\mathbf{D}^{-1}$ ako je:

(a) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

(b) $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

49. Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

50. Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

51. Riješite matričnu jednadžbu:

(a) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix};$$

(b) $$\mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix};$$

(c) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

52. Riješite matričnu jednadžbu:

(a) $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B} + 2\,\mathbf{I}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{X}\,\mathbf{C} = 7\,\mathbf{I} + \mathbf{D}$ ako je $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

53. Riješite matričnu jednadžbu:

(a) $(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{B})\,\mathbf{X}\,\mathbf{C} = \mathbf{A}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix};$$

(b) $(\mathbf{A}+2\,\mathbf{B})\,\mathbf{X}\,\mathbf{C}=(\mathbf{B}+\mathbf{I})$ ako je
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\-5&-4\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&3\\2&4\end{bmatrix};$$

(c) $\mathbf{A}\,\mathbf{X}\,(\mathbf{B}+2\,\mathbf{I})=2\,\mathbf{C}$ ako je
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1&0\\-1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&5\\4&-5\end{bmatrix};$$

(d) $(\mathbf{I}-\mathbf{B})\,\mathbf{X}=\mathbf{A}\,\mathbf{C}$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2\\0&5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}^T+\mathbf{I})$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-1&3\\2&-4\end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{X}\,(\mathbf{I}+\mathbf{B})=\mathbf{A}\,\mathbf{C}$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&0\\4&-5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}^T-\mathbf{I})$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2&0\\-2&2\end{bmatrix}$.

Pritom je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda 2.

54. Riješite matričnu jednadžbu $(\mathbf{A}-2\,\mathbf{I})\,\mathbf{X}=\mathbf{A}+\mathbf{I}$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&2\\2&3&4\\1&0&1\end{bmatrix}$,

gdje je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda 3.

55. Riješite matričnu jednadžbu:

(a) $(\mathbf{A}-2\,\mathbf{I})\,\mathbf{X}=\mathbf{B}^T$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5&3&6\\5&0&-4\\2&0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-7&5&3\\-2&2&2\\-9&7&5\end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{X}\,(\mathbf{A}-5\,\mathbf{I})=\mathbf{B}^T$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6&3&-2\\-2&-2&5\\3&11&-4\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&-2&4\\-2&3&4\\0&-1&2\end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{X}\,(\mathbf{B}+3\,\mathbf{I})=\mathbf{C}^T$ ako je $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-6&1&-1\\1&-3&1\\-2&2&0\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2&3&-4\\-1&-1&2\\-1&1&-1\end{bmatrix}$;

(d) $(2\,\mathbf{I}+\mathbf{A})\,\mathbf{X}=\mathbf{B}^T$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-2&-4&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&3&-2\\-1&4&6\\0&-1&0\end{bmatrix}$;

(e) $(\mathbf{B}-2\,\mathbf{I})\,\mathbf{X}=(\mathbf{C}-\mathbf{I})^T$ ako je $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&1&-2\\0&2&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&1\\5&-4&-1\\2&1&0\end{bmatrix}$.

Pritom je $\mathbf{I}$ jedinična matrica reda 3.

56. Riješite matričnu jednadžbu:

(a) $\mathbf{X}\,(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = (\mathbf{C}-\mathbf{I})^T$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -10 & 7 & 11 \\ -18 & 13 & 21 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

(b) $(3\mathbf{A}-2\mathbf{B})\,\mathbf{X} = \mathbf{C}^T + \mathbf{I}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

(c) $\mathbf{X}\,\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 - \mathbf{C}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 22 \\ 11 & 20 & 15 \\ 10 & 30 & 32 \end{bmatrix};$$

(d) $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}^2 - 4\,\mathbf{B}$ ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

57. Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}\,\mathbf{D}^T\,\mathbf{A}^2$ uz pretpostavku da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne kvadratne matrice reda 2 takve da vrijedi $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jedinična matrica reda 2), gdje je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

58. Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{X}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^2\,\mathbf{C}\,\mathbf{D}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ uz pretpostavku da su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ regularne kvadratne matrice reda 2 takve da vrijedi $\mathbf{A}\,\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ je jedinična matrica reda 2), gdje je

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

59. Odredite rang matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$.

Rješenje: $r(\mathbf{A}) = 0$, $r(\mathbf{B}) = 1$, $r(\mathbf{C}) = 2$.

60. Odredite rang matrice:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$;

(e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$;

(f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

(a) $r(\mathbf{A}) = 2$; (b) $r(\mathbf{B}) = 2$; (c) $r(\mathbf{C}) = 1$; (d) $r(\mathbf{A}) = 2$;
(e) $r(\mathbf{B}) = 2$; (f) $r(\mathbf{C}) = 1$.

61. Odredite rang matrice:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 15 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: (a) $r(\mathbf{A}) = 3$; (b) $r(\mathbf{A}) = 2$; (c) $r(\mathbf{A}) = 3$; (d) $r(\mathbf{A}) = 3$.

62. Odredite rang matrice:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&-2&15&8\\2&0&14&8\\1&-1&4&2\end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-4&-2&1&6\\0&4&-4&2\\1&0&0&0\end{bmatrix};$$

$$(e)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&3&-2&4\\4&2&5&1&7\\2&1&1&8&2\end{bmatrix}.$$

Rješenje:

(a) $r(\mathbf{A})=2$; (b) $r(\mathbf{A})=3$; (c) $r(\mathbf{A})=2$; (d) $r(\mathbf{A})=3$; (e) $r(\mathbf{A})=2$.

63. Odredite rang matrice:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1&2&0&1&4\\1&2&3&-1&5\\0&4&3&0&9\end{bmatrix};$$

$$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&5&3\\-1&3&-1&2\\1&12&13&13\\1&7&9&8\end{bmatrix};$$

$$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&-1&4\\1&0&1&2\\3&4&0&7\\-2&-1&4&1\\4&-2&3&5\end{bmatrix};$$

$$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&0&0\\1&-2&0&0&0\\0&0&1&3&4\\0&0&-1&2&3\\0&0&1&0&3\end{bmatrix}.$$

64. Odredite rang matrice:

$$(a)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&2&-1\\2&-2&0&4&-2\\3&-3&0&6&-3\\4&-4&0&8&-4\end{bmatrix};$$

$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 14 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix};$

$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -3 & 6 & 1 \end{bmatrix};$

$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 10 & 18 & -7 & 10 & 15 \end{bmatrix};$

$(e)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & -1 & 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

65. Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ bude jednak: (a) jedan; (b) dva; (c) tri.

Rješenje:

(a) za $\lambda=-4$ je $r(\mathbf{A})=1$; (b) za svaki $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-4\}$ je $r(\mathbf{A})=2$;
(c) ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $r(\mathbf{A})=3$.

66. Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{bmatrix}$ bude jednak: (a) jedan; (b) dva; (c) tri.

Rješenje:

(a) ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $r(\mathbf{A})=1$; (b) za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ je $r(\mathbf{A})=2$;
(c) ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $r(\mathbf{A})=3$.

67. Odredite vrijednost parametra $x \in \mathbb{R}$, tako da vrijedi:

$(a)\quad r(\mathbf{A})=1$ ako je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & x & -6 \\ -5 & 10 & 15 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$

(b) $r(\mathbf{A}) = 2$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & x \\ 5 & -10 & 15 \end{bmatrix}$.

68. Neka je zadana matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & 14 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Odredite vrijednost parametra $x \in \mathbb{R}$, tako da je $r(\mathbf{A}) = 2$.

Rješenje: za $x = 14$ je $r(\mathbf{A}) = 2$; za svaki $x \in \mathbb{R}\backslash\{14\}$ je $r(\mathbf{A}) = 3$.

69. Neka je zadana matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 & 13 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ \lambda & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Odredite vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je $r(\mathbf{A}) = 3$.

Rješenje: za $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ je $r(\mathbf{A}) = 3$; uočimo da za $\lambda = 0$ je $r(\mathbf{A}) = 2$.

70. U ovisnosti o vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang matrice:

(a) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda & 3 \\ 1 & 11 & -6 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

(a) za $\lambda = 1$ je $r(\mathbf{B}) = 1$, za $\lambda = -1$ je $r(\mathbf{B}) = 2$,
za svaki $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ je $r(\mathbf{B}) = 3$;

(b) za $\lambda = 3$ je $r(\mathbf{A}) = 2$, a za svaki $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ je $r(\mathbf{A}) = 3$;

(c) za $\lambda = 3$ je $r(\mathbf{C}) = 2$, a za svaki $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ je $r(\mathbf{C}) = 3$.

71. Odredite rang matrice $\mathbf{A}$ u ovisnosti o vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$ ako je:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & \alpha \end{bmatrix}$.

$(b)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -7 & 9 \\ 1 & 11 & 2\alpha \end{bmatrix};$

$(c)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -4 & 12 & \alpha^2 \\ 4 & 0 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix};$

$(d)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 13 & 1-\alpha \\ 1 & -2 & -3 & \alpha \end{bmatrix};$

$(e)\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 5 & -1 \\ -2 & -4 & -4 & 5 \\ 11 & -5 & 7 & \alpha-1 \end{bmatrix};$

72. Neka su zadane matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$.

    Provjerite vrijede li nejednakosti: $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A})$ i $r(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) \le r(\mathbf{B})$.

73. Razmatrajući rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ispitajte je li ona regularna.

    Rješenje: $r(\mathbf{A})=3,$ stoga je $\mathbf{A}$ singularna matrica.

74. Ispitajte je li rang matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ maksimalan.

    Rješenje:

    Primjenom korolara 8.72 slijedi da za rang matrice $\mathbf{A}$ vrijedi $0 \le r(\mathbf{A}) \le 3.$

    Za zadanu matricu $\mathbf{A}$ je $r(\mathbf{A})=3,$ stoga je rang matrice $\mathbf{A}$ maksimalan.

75. Ispitajte imaju li matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ jednaki rang.

    Rješenje: $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{B})=3.$

11.7 Sustavi linearnih jednadžbi

1. Riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3 &= 0\\ 2x_1-x_2+3x_3 &= 0\\ x_1+x_2-x_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} x+y-z &= 0\\ 2x+y+2z &= 10\\ x-3y+z &= -2; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_3-2 &= 0\\ x_1+5x_2-4x_3+5 &= 0\\ 4x_1+x_2-3x_3+4 &= 0; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} x_1-2x_2+x_3 &= 1\\ 2x_1-x_2+x_3 &= 2\\ 3x_1-3x_2+2x_3 &= 3; \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 &= 5\\ 2x_1-x_2-x_3 &= 1\\ x_1+3x_2+4x_3 &= 6; \end{aligned}$$

$$(f)\quad \begin{aligned} 3x+4y-z &= -2\\ 5x+3y-4z &= -2\\ 4x+2y+3z &= 5. \end{aligned}$$

2. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} 3x-y+3z &= 4\\ 6x-2y+6z &= 1\\ 5x+4y &= 2; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} 2x-y+2z &= 9\\ x+4y-8z &= -18\\ -x+3y+5z &= 27; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x+2y+3z &= 3\\ -2x+z &= -2\\ x+2y-z &= 3\\ -x+2y+12z &= 1; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} x_1-x_2-x_3-3x_4 &= -16\\ x_1-x_4 &= -1\\ x_3+2x_4 &= 12\\ x_2+x_4 &= 7. \end{aligned}$$

3. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1\\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= -3\\ -x_1 + x_3 - 3x_4 &= 2\\ -5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 12x_4 &= 1; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1\\ -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2\\ x_1 - x_3 - x_4 &= 3\\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1\\ -x_1 + x_3 &= 6\\ -x_1 - x_2 + 2x_4 &= -5\\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 &= -4\\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= -4\\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= -2\\ x_1 + x_4 &= 7; \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_4 &= 2\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 6\\ -x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -5\\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0; \end{aligned}$$

$$(f)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -9\\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 12\\ -x_1 - x_2 - x_4 &= -5\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 4x_4 &= -14. \end{aligned}$$

4. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 &= 0\\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_4 &= 0\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4\\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0\\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 6\\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 11\\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 3; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3\\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3; \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 4\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4 &= 6\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4 &= 12\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4 &= 6; \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1+5x_2+4x_3+x_4 &= 20\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4 &= 11\\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4 &= 40\\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4 &= 37. \end{aligned}$$

5. Gaussovom metodom eliminacije riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3+2x_4 &= 1\\ 5x_1-x_2+3x_3-x_4 &= 3\\ 2x_1+x_2+2x_3-3x_4 &= 4; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3 &= 0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4+6 &= 0\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4+8 &= 0\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4+8 &= 0; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 6x_1+5x_2-2x_3+4x_4+4 &= 0\\ 9x_1-x_2+4x_3-2x_4-13 &= 0\\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4-1 &= 0\\ 3x_1-9x_2+2x_4-11 &= 0; \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5 &= 2\\ 3x_1+x_2-x_3-x_4 &= 2\\ 9x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5 &= 5\\ x_1-x_2-x_4+2x_5 &= 1; \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5 &= 1\\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5 &= 0\\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5 &= 2\\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5 &= 3. \end{aligned}$$

6. Primjenom Cramerovog pravila riješite sljedeće homogene sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{aligned} x-y+3z &= 0\\ 3x+y+5z &= 0; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0\\ 3x_1+x_2-x_3 &= 0\\ 2x_1+x_2 &= 0; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 2y - 5z &= 0 \\ 3x + y - 2z &= 0; \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 0 \\ 5x + 4y + 3z &= 0 \\ 4x + 3y + 2z &= 0; \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

7. Primjenom Cramerovog pravila riješite sljedeće sustave linearnih jednadžbi:

(a)
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -4 \\ x + 2y - 4z &= 19 \\ -3x + 4y + 2z &= 3; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= -17 \\ 4x + 3y - 2z &= 18 \\ 3x + y + 3z &= -7; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3z &= 9 \\ 3x - 5y + 2z &= -4 \\ 4x - 7y + z &= 5. \end{aligned}$$

8. Odredite vrijednost parametra $p \in \mathbb{R}$, tako da zadani sustav ima beskonačno mnogo rješenja:

(a)
$$\begin{aligned} 2x + (p-1)y &= 3 \\ (p+1)x + 4y &= -3; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} px + y &= p - 1 \\ 6x + (p-1)y &= 4; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x + (p-1)y + z &= 3 \\ (p+1)x + 4y + z &= -3 \\ x + y + z &= 0; \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} px + y + z &= p - 1 \\ 6x + (p-1)y + z &= 4 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

9. U ovisnosti o vrijednosti parametra $p \in \mathbb{R}$ odredite rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} p\,x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + p\,x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + p\,x_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_2 + p\,x_3 &= 0; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= p; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -3x_2 - p\,x_3 &= -2. \end{aligned}$$

10. U ovisnosti o vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 &= 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 &= 2; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \lambda; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 &= \lambda^2; \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} 3x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 &= -\lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 &= 2\lambda \\ (4\lambda+3)x_1 + (2\lambda-1)x_2 + (\lambda+4)x_3 &= 2\lambda+3. \end{aligned}$$

11. U ovisnosti o vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} x_1 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 - 2\lambda x_4 &= -5 \\ -3x_1 - 9x_3 + 3\lambda x_4 &= 3; \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + (\lambda - 6)x_3 - 11x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + (\lambda + 6)x_3 - 2x_4 &= 3; \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ (1+\lambda)x_1 + (2+\lambda)x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ \lambda x_2 - \lambda x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1; \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda; \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 6x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 7 \\ 8x_1 + 12x_2 + 7x_3 + \lambda x_4 &= 9. \end{aligned}$$

11.8 Sustavi linearnih nejednadžbi s dvije nepoznanice

1. Prikažite grafički skup rješenja sljedećih sustava linearnih nejednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} x+y &> 5\\ 2x-3y &< 1; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} 5x-4y &\leq 3\\ x-2y &< 1; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} 2x+4y &\geq \tfrac{1}{3}\\ 4x-5y &> 1; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} x-4y &< 9\\ x-2y &> -3; \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} x-\tfrac{5}{2}y &\leq \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{9}{2}x-5y &\geq -2; \end{aligned}$$

$$(f)\quad \begin{aligned} 2x-3y &\geq -\tfrac{2}{5}\\ -3x+2y &> 5. \end{aligned}$$

2. Prikažite grafički skup rješenja sljedećih sustava linearnih nejednadžbi:

$$(a)\quad \begin{aligned} 2x+y &< 2\\ 5x-3y &> -2\\ 4x-3y &\leq 3; \end{aligned}$$

$$(b)\quad \begin{aligned} 2x-2y &\geq -1\\ 3x+2y &< 7\\ -5x+2y &\leq \tfrac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} -5x-3y &> -4\\ 2x-\tfrac{3}{4}y &< -\tfrac{4}{3}\\ -4x-5y &> -6; \end{aligned}$$

$$(d)\quad \begin{aligned} -\tfrac{1}{4}x+7y &\leq -4\\ 7x+2y &\geq 5\\ -6x+7y &\leq -3; \end{aligned}$$

$$(e)\quad \begin{aligned} 8x-3y &\geq -2\\ -9x+4y &\leq -1\\ -5x-6y &\leq -4; \end{aligned}$$

$$(f)\quad \begin{aligned} -2x-8y &\leq -\tfrac{1}{6}\\ 2x+2y &> -9\\ x+7y &\leq -3. \end{aligned}$$

3. Prikažite grafički skup rješenja sljedećih sustava linearnih nejednadžbi:

(a)
$$\begin{aligned} 2x - y &> 9 \\ x + 4y &< -18 \\ -3x - 8y &< -7 \\ -x + 5y &> 27; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - y &\leq 4 \\ 6x - 2y &\geq -1 \\ x + 4y &\geq -5 \\ 5x + 4y &\leq 2; \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - 3y &\leq -3 \\ -2x + y &> -2 \\ x + y &< -3 \\ -x + 12y &\leq 7; \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} -x + 3y &< -16 \\ x - 2y &\leq -4 \\ -4x + 5y &\geq -12 \\ 2x + 3y &\leq -7; \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} -7x + 2y &\leq -9 \\ 4x - 8y &\geq -11 \\ -3x + 5y &\geq 7 \\ 5x - 6y &\leq -4; \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} -x + 3y &> -4 \\ 2x + 6y &< 5 \\ 5x - 7y &< -3 \\ x - 4y &< -14. \end{aligned}$$

4. Prikažite grafički skup rješenja sljedećih sustava linearnih nejednadžbi:

(a)
$$\begin{aligned} -8x + 9y &< -11 \\ 3x - 7y &\leq -5 \\ -3x + 8y &\geq -3 \\ -2x - 3y &> -7 \\ 5x + 9y &\leq -12; \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} -5x - 7y &\geq -9 \\ 6x + 7y &\geq -12 \\ -2x - 5y &\leq 9 \\ -4x + 9y &\geq -2 \\ -x - 7y &\leq -11; \end{aligned}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcr} 2x+5y & < & -7 \\ -6x+7y & \leq & -12 \\ 7x+9y & > & -3 \\ -x+11y & \leq & 9 \\ 3x-8y & > & -13; \end{array}$$

$$(d)\quad \begin{array}{rcr} -x-6y & > & -16 \\ 5x+8y & \leq & -12 \\ -6x-9y & > & -5 \\ 3x+7y & \geq & -7 \\ -5x+8y & < & -9; \end{array}$$

$$(e)\quad \begin{array}{rcl} -2x+3y-5 & \geq & 0 \\ 6x-4y+4 & \geq & 0 \\ -2x+4y+3 & < & 0 \\ -x+7y+5 & \geq & 0 \\ -3x+6y+7 & < & 0; \end{array}$$

$$(f)\quad \begin{array}{rcl} 3x+7y-5 & < & 0 \\ -2x+9y+4 & \geq & 0 \\ -6x+2y+5 & \leq & 0 \\ -6x+7y+3 & \leq & 0 \\ 8x-3y-7 & < & 0. \end{array}$$